Heisenbergの不確定性原理の証明

小　杉　誠　司

（2016年10月15日受理）

要　旨

Heisenbergがγ線顕微鏡の思考実験において発見した不確定性関係は，位置の測定誤差とその測定が対象の運動量に及ぼす擾乱が相反関係にあることを示している．その測定誤差が一般に信じられている相互作用前の位置の測定の誤差ではなく，相互作用後の位置の測定の誤差であることを，Heisenbergが論文及び著書で述べていることに基づいて明らかにした．

量子測定に用いるべき測定値を導出し，その測定値を用いたときHeisenbergが発見した不確定性関係が一般に成立することを証明した．プローブのオブザーバブル$\hat{\Sigma}_0$の標準偏差$\sigma(\Sigma_0)$が0のとき，測定誤差が0になるように相互作用前のオブザーバブル$\hat{x}_0$と相互作用後のオブザーバブル$\hat{x}_t$の測定値$G(X)$と$F(X)$を定義した．このように定義された測定値$G(X)$を用いたとき任意の$|\phi_0\rangle$に対してBornの確率則を再現することを示した．ここで$|\phi_0\rangle$は相互作用前の測定対象の状態ベクトルである．$\sigma(\Sigma_0)>0$であるときの測定値は，測定値$F(X)$をマクローリン展開したときの定数γ_0の任意の微小変化$\delta\gamma_0$に対する測定誤差の２乗の変化$\delta\epsilon^2(x_t)$が，任意の$|\phi_0\rangle$に対して0になるという要請から導出した．このようにして得られた測定値を用いると偏りのない測定となるので，Heisenbergの不確定性関係が常に成立する．$\hat{x}_0$測定の測定値も同じ要請に基づいて導出することができ，$\hat{x}_t$測定の場合と同様に偏りのない測定となる．このときに測定値$G(X)$が満たす不確定性関係を導出した．

キーワード　測定値，測定誤差，非直接測定モデル，偏りのない測定，ボルンの確率則

1

1　はじめに

1927年にHeisenbergは有名なγ線顕微鏡の思考実験において，電子の位置測定の誤差ϵと測定による電子の擾乱（disturbance）ηとの間に不確定性関係式

$$\epsilon\eta \sim h \tag{1}$$

が成立することを主張した[1)]．さらに彼はもし不確定性関係（1）の制限を超えて，もっと

よい精度で位置 q と運動量 p を同時に決定することができる実験が存在すれば，量子力学は破綻するであろうと述べている．運動量が正確にわかっていて，そのため位置の不確定さが非常に大きい自由電子を考える．Heisenbergは位置測定後の電子の位置の不確定さは測定誤差に等しいと考えていたので，その状態にある電子に対して非常に小さい測定誤差 ϵ で位置測定を行うと，電子の運動量は大きく変化しなければならないと考えた[2]．もしそうでなければ，測定後の電子の位置 $\hat{x}_t$ と運動量 $\hat{p}_t$ に対するKennard－Robertsonの不確定性関係[3]，[4]

$$\sigma(x_t)\sigma(p_t) \geq \hbar/2 \tag{2}$$

が成立しなくなってしまい，量子力学が破綻してしまうからである．ここで $\sigma(A)$ はオブザーバブル $\hat{A}$ の標準偏差である．このような理由から，測定後の電子の位置と運動量がKennard-Robertsonの不確定性関係を満たし矛盾が起きないようにするためには，すべての位置測定は不確定性関係(1)を満たさなければならないとHeisenbergは考えた．前論文[5]，[6]でも指摘したが，彼は３つの位置測定の思考実験においてこの不確定性関係（1）が成立していることを示したが，この不確定性関係がすべての測定に対して成立することを証明しなかった．また今日に至るまで誰もこの関係が一般的に成立することを証明していない．

Ozawaは2002年に測定誤差 ϵ が0で運動量の擾乱 η が有界である位置測定が存在することを理論的に示し，Heisenbergの不確定性関係(1)が一般には成立していないと主張した[7]．更に最近になって，ウィーン工科大学のグループによる中性子スピンの射影測定[8]及び東北大学のグループによる光子の偏光測定[9]，[10]による検証実験等によってHeisenbergの不確定性関係

$$\epsilon(x_0)\eta(y_0) \geq \frac{1}{2}|\langle\phi_0|[\hat{x}_0, \hat{y}_0]|\phi_0\rangle| \tag{3}$$

が一般には成立していないことが明らかになっている．ここで $\epsilon(x_0)$ は測定前のオブザーバブル $\hat{x}_0$ の測定誤差，$\eta(y_0)$ は測定が対象の他のオブザーバブル $\hat{y}_0$ に与える擾乱である．

これらのことは最初に述べたHeisenbergの考察が間違っていたことを示しているのであろうか？　そうではなく，Heisenbergが主張していた不確定性関係（1）はOzawaや参考文献（8)－(10）の著者達が主張している不確定性関係(3)ではないというのが，筆者の考えである．筆者は不確定性関係（3）が成立していない位置測定が存在することには同意している．しかし測定誤差は測定後の電子の位置の不確定さを決定するとHeisenbergは考えているので[1]，Heisenbergの測定過程の不確定性関係（1）における測定誤差は，測定後の電子の位置の不確定さを決定するものでなければならない．

2

前論文[11]，[12]で既に明らかにしているように，測定後の位置オブザーバブル $\hat{x}_t$ の測定誤差 $\epsilon(x_t)$ に対しては，一般に

$$\epsilon(x_t) \geq \sigma(x_t) \tag{4}$$

が成立している[注1]．ここで $\sigma(x_t)$ は測定後の電子の位置の標準偏差である．測定前の位置オブザーバブル $\hat{x}_0$ の測定誤差 $\epsilon(x_0)$ に対してはこのような関係式は成立していない[注2]．

このように測定後の電子の位置の不確定さを決定しているのは，測定誤差 $\epsilon(x_0)$ ではなく

測定誤差 $\epsilon(x_t)$ であるから，彼の元々の測定誤差は測定前のオブザーバブル $\hat{x}_0$ の測定誤差 $\epsilon(x_0)$ ではなく，測定後のオブザーバブル $\hat{x}_t$ の測定誤差 $\epsilon(x_t)$ でなければならない．従ってHeisenbergの不確定性関係は

$$\epsilon(x_t)\eta(y_0) \geq \frac{1}{2}|\langle\phi_0,\xi_0|[\hat{x}_t,\hat{y}_t]|\phi_0,\xi_0\rangle| \tag{5}$$

と解釈しなければならない．ここで $|\xi_0\rangle$ はプローブの初期状態で，テンソル積 $|\phi_0\rangle\otimes|\xi_0\rangle$ を $|\phi_0,\xi_0\rangle$ と書いた．関係式（3）が成立していなくても量子力学は破綻しないが，式（5）が成立しないために測定後の電子に対してKennard−Robertsonの不確定性関係（2）が成立しなくなってしまえば，量子力学は破綻してしまう．このようにHeisenbergの考察の中心には，測定後の電子がKennard−Robertsonの不確定性関係（2）を満たすためには，どのような測定過程の不確定性関係が成立していなければならないかという問題意識があったことは明らかである．

このことはHeisenbergが有名な γ 線顕微鏡の思考実験において，この不確定性関係（1）は測定後の電子の運動に対して成立していると結論している[2)] ことからも支持される．W. M. de Muynckもこの不確定性関係は過去の電子（測定前の電子）についてではなく，未来の電子（測定後の電子）の状態について言及していると述べ，更にこの事実はしばしば忘れられているといっている[13)]．本論文ではこのHeisenbergの不確定性関係（5）を証明する．

前論文 I [14)] では，測定誤差が最小になるように測定値を定義して理論的測定値を得た．そのときにも指摘していたが，理論的測定値は測定対象の初期状態の確率密度 $|\phi_0(x_0)|^2$ に依存しているので，$|\phi_0(x_0)|^2$ がわからなければ実際に理論的測定値を求めることはできない．しかし $\hat{x}_0$ 測定の目的は未知である $|\phi_0(x_0)|^2$ についての情報を得ることにある．すなわち $\hat{x}_0$ の固有値 x_0 の測定とその固有値を得る確率密度 $|\phi_0(x_0)|^2$ を求めることにある．その測定値を得るために $|\phi_0(x_0)|^2$ の情報がわかっていなければならないというのは矛盾しているように見える．何故ならば，そもそも対象の確率密度 $|\phi_0(x_0)|^2$ がわかっていれば $\hat{x}_0$ 測定をおこなう必要がないからである．しかし同じ条件の下で非常に多くの測定を繰り返したときには，一連の測定結果から対象の $|\phi_0(x_0)|^2$ を予測することができるので，このことは問題にならないと前論文 I で述べた[注3)]．

しかし 1 回だけ $\hat{x}_0$ 測定をおこなう場合には，$|\phi_0(x_0)|^2$ の情報を得ることはできないから，理論的測定値を利用することはできない．またこの理論的測定値は測定の常識とかけ離れた振舞いをする．このことは，通常の測定では測定対象の情報を持っていないことを前提にしているが，理論的測定値は測定対象の情報を測定前に持っていて，その情報を用いて測定値を求めていることから生じている．一つの例を挙げると，電子の測定前の位置が $\bar{x}_0$ である場合，理論的測定値はプローブの初期状態 $|\xi_0\rangle$ によらず $\bar{x}_0$ となる．しかしこの測定値は以下に示すように実際の測定によって得られた値とは言えない．理論的測定値は測定誤差が最小になるように定義されている．今の場合 x_0 は $\bar{x}_0$ の値しかとらないから，測定値を $\bar{x}_0$ とすれば測定誤差は最小値0となる．0より小さい測定誤差はないから理論的測定値は $\bar{x}_0$ である．このように実際に測定をせずに理論的測定値 $\bar{x}_0$ を得ることができる[注4)]．また 3

この場合にはプローブの初期状態によらず測定誤差は0になっている．

このような理論的測定値を用いた測定をHeisenbergが想定していなかったことは，γ 線顕微鏡についての彼の次の考察から明らかである：プローブである光の波長を小さくすると測定誤差 ϵ を小さくすることができるが，このときには光の運動量が大きくなるので電子に与える擾乱が大きくなり，常に不確定性関係（1）が成立しているとHeisenbergは述べている[1)]．このようにHeisenbergは1回の測定を考え，プローブである光の波長 λ が測定誤差を決めていると考えている．更にその後の文献ではもう少し定量的な分析をおこない，$\epsilon \sim \lambda/\sin\theta$ を導出している[2)]．ここで 2θ はレンズの直径が物体の位置で張る角度である．

γ 線顕微鏡の位置測定で理論的測定値を用いた場合，Heisenbergの不確定性関係（5）が成立しないことは次の考察から明らかである．γ 線の波長を非常に大きくして電子の位置を測定する．このとき γ 線が電子に与える運動量は非常に小さいから擾乱は $\eta \approx 0$ である．また測定後の電子の位置はほとんど変わらないと考えてよいであろう．実際の測定では波長が大きいとき電子の位置を正確に測ることはできないが，理論的測定値を用いると電子の位置は $\bar{x}_0$ であることが測定前にわかっているので，電子の位置の測定値は $\bar{x}_0$ となり，測定誤差は $\epsilon(x_t) = 0$ となる．従って $\epsilon(x_t)\eta \approx 0$ となり，不確定性関係（5）は成立しない．

上で明らかにしたようにHeisenbergが想定していた測定値は理論的測定値ではないので，本論文では $|\phi_0(x_0)|^2$ についての情報を測定前に全く持たないときの測定値を導出し，その測定値を用いたときHeisenbergの不確定性関係（5）が導出できることを明らかにする．

2　非直接測定モデル

測定モデルは前論文Ⅰと同じであるから，ここでは簡単に説明をする．詳細は前論文Ⅰを参照してください．ミクロな対象の量子測定を考える．対象粒子と測定装置の一部であるプローブは時刻0に相互作用を始め，時刻 t に相互作用を終了するとする．議論を簡単にするために対象とプローブが1次元の運動をおこなう場合を考察する．粒子とプローブの相互作用が終了した直後にプローブの演算子 $\hat{X}_t$ を別の測定装置を用いて測定し，その測定値 X を用いて対象粒子の測定前のオブザーバブル $\hat{x}_0$ と測定後のオブザーバブル $\hat{x}_t$ の測定値を予測する．このときの時間発展のユニタリ演算子を $\hat{U}$ とすると，$\hat{x}_t$ は $\hat{U}^\dagger(\hat{x}_0 \otimes \hat{I})\hat{U}$ で与えられる．$\hat{X}_t$ を測定する際の測定誤差は0であり，またこの測定によって対象粒子のオブザーバブルは擾乱されないと仮定されている．

測定後のオブザーバブル $\hat{x}_t$ と $\hat{X}_t$ は可換であるので同時固有状態が存在するが，時間発展演算子 $\hat{U}$ を用いてオブザーバブル $\hat{x}_0$ の測定が可能であるためには，この同時固有状態は
4 $|x_0, \Sigma_0\rangle$ でなければならない．ここで $|x_0\rangle$ は $\hat{x}_0$ の固有状態，$|\Sigma_0\rangle$ はプローブに作用するある演算子 $\hat{\Sigma}_0$ の固有状態である：

$$\hat{x}_0|x_0\rangle = x_0|x_0\rangle, \qquad \hat{\Sigma}_0|\Sigma_0\rangle = \Sigma_0|\Sigma_0\rangle. \tag{6}$$

ここで固有値は連続とした．また簡単のため縮退はないと仮定した．このとき $\hat{U}|x_0, \Sigma_0\rangle$ が演算子 $\hat{x}_0$ と $\hat{X}_0$ の同時固有状態であり，その固有値がそれぞれ x，X であることがわかる：

$$\hat{U}|x_0, \Sigma_0\rangle = e^{i\delta}|x, X\rangle, \qquad \hat{x}_0|x\rangle = x|x\rangle, \qquad \hat{X}_0|X\rangle = X|X\rangle. \tag{7}$$

ここで $e^{i\delta}$ は位相因子である．この式は，相互作用前の対象とプローブの状態$|x_0, \Sigma_0\rangle$が，相互作用後に$|x, X\rangle$に変わることを示している[注5]．ここで式（7）の固有値 x と X は演算子 $\hat{x_0}$ と $\hat{\Sigma_0}$ の固有値 x_0 と Σ_0 の関数であるから

$$x = f(x_0, \Sigma_0), \qquad X = g(x_0, \Sigma_0) \tag{8}$$

とかける．

固有値が離散的な場合には，上の式（6），（7），（8）の代わりに

$$\begin{aligned} \hat{x}_0|x_i\rangle &= x_i|x_0\rangle, \qquad \hat{\Sigma_0}|\Sigma_j\rangle = \Sigma_j|\Sigma_j\rangle, && (9)\\ \hat{U}|x_i, \Sigma_j\rangle &= e^{i\delta}|x_k, X_l\rangle, \quad \hat{x}_t|x_k\rangle = x_k|x_k\rangle, \quad \hat{X}_t|X_l\rangle = X_l|X_l\rangle, && (10)\\ x_k &= f(x_i, \Sigma_j), \qquad X_l = g(x_i, \Sigma_j) && (11) \end{aligned}$$

が成立する．

3　初期状態が $|x_0, \Sigma_0\rangle$ であるときの測定値

最初に対象とプローブの初期状態が，それぞれ $\hat{x}_0$ と $\hat{\Sigma}_0$ の固有状態 $|x_0\rangle$，$|\Sigma_0\rangle$ である場合を考える．固有値は連続とする．このとき式（7）によって相互作用後の対象とプローブの状態が一意的に決定されている．非直接測定モデルでは Σ_0 の値を既知として，測定によって得られた X の値を用いて x_0 の値を推定するのであるから， $\hat{x}_0$ の測定値を X の関数 $G(X)$ として，測定誤差 $\epsilon(x_0)$ が0となるように，すなわち $G(X)$ が x_0 と等しくなるように測定値を定義するのが合理的である：

$$G(X) = x_0. \tag{12}$$

すなわち初期状態が $|x_0, \Sigma_0\rangle$ のときには固有値 x_0， Σ_0 にゆらぎはないから，古典論のように測定値 $G(X)$ が測定対象の値 x_0 を与えるように理論を構成できる．上の式を x_0 の恒等式とみなすと，右辺は x_0 の 1 次式であるから左辺も x_0 の 1 次式でなければならない．従って最も簡単な場合は， X が x_0 の 1 次式で $G(X)$ が X の 1 次式の場合である：

$$X = g_0(\Sigma_0) + g_1(\Sigma_0)x_0, \quad G(X) = \gamma_0 + \gamma_1 X, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

ここで $g_i(\Sigma_0)$，$(i = 1, 2)$ は Σ_0 の任意の関数で， γ_0 と γ_1 は実定数である．

式（13）を（12）に代入して， $\gamma_0 = -g_0/g_1$， $\gamma_1 = 1/g_1$， $g_1 \neq 0$ を得る．ここで $g_1 = 0$ のとき X の値を用いて x_0 の値を求めることはできないから， $g_1 \neq 0$ でなければならない．よって $\hat{x}_0$ の測定値

$$G(X) = X/g_1 - g_0/g_1, \quad g_1 \neq 0 \tag{14}$$

が得られる．

$\hat{U}|x_0, \Sigma_0\rangle = e^{i\delta}|x, X\rangle$ が成立しているので，対象とプローブの初期状態がそれぞれ $|x_0\rangle$， $|\Sigma_0\rangle$ であるとき，相互作用後の対象の状態は一意的に決まっている．本論文では測定値 X を用いて x_0 の値だけでなく， x の値を推定することができる場合を考えている．このとき $\hat{x}_0$ 測定の場合と同様に， Σ_0 の値を既知として $\hat{x}_t$ の測定誤差が0になるように測定値 $F(X)$ を定義することができる：

$$F(X) = x. \tag{15}$$

ここで $\hat{x}_0$ 測定の場合と同様に， $h_i(\Sigma_0), (i = 1, 2)$ を Σ_0 の任意の関数として，

$$X = h_0(\Sigma_0) + h_1(\Sigma_0)x，\ F(X) = \gamma_0 + \gamma_1 X，\ \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} \tag{16}$$

の場合を考えると，γ_0 と γ_1 を求めて $\hat{x}_t$ の測定値

$$F(X) = X/h_1 - h_0/h_1, \quad h_1 \neq 0 \tag{17}$$

を得ることができる．

固有値が離散的な場合の測定値も，同じように考えて求めることができる．すなわち $\hat{X}_t$ の測定値を X_l として

$$X_l = g_0(\Sigma_j) + g_1(\Sigma_j)x_i, \tag{18}$$

$$X_l = h_0(\Sigma_j) \ + h_1(\Sigma_j)x_k \tag{19}$$

と展開できるときには，$\hat{x}_0$ と $\hat{x}_t$ の測定値は，それぞれ

$$G(X_l) \ = \ X_l/g_1 - g_0/g_1,\ g_1 \neq 0, \tag{20}$$

$$F(X_l) \ = \ X_l/h_1 - h_0/h_1,\ h_1 \neq 0 \tag{21}$$

となる．

筆者の知る限り，これまで議論されてきた量子測定の具体的な例では，すべて式 (13) のように x_0 の 1 次式で与えられている． $\hat{x}_t$ 測定についても同様に X は x の 1 次式で与えられている．

しかし式 (13) だけが式 (12) を満たしているわけではない．上で述べたことをまとめると，X が式 (13) で与えられたとき x_0 の測定値 $G(X)$ が式 (14) で与えられ，そのとき $G(X) = x_0$ を満足している．このことは Σ_0 の値を既知としたとき，x_0 の関数 $X = q(x_0)$ の逆関数 $q^{-1}(X)$ が $G(X)$ であることを示している：

$$G(X) = q^{-1}(X) = \ q^{-1}(q(x_0)) = x_0.$$

逆関数 $G(X)$ が存在するためには，Σ_0 の値を既知として X を x_0 の関数とみなしたとき，X は狭義の単調関数でなければならない． $g_1(\Sigma_0) \neq 0$ のとき式 (13) の X は直線の式であり，最も簡単な狭義の単調関数であることがわかる．従って一般的には X が x_0 の狭義の単調関数のとき，逆関数 $G(X)$ が存在し，$G(X)$ が x_0 の測定値となる．同様にして，Σ_0 の値を既知として X を x の関数とみなしたとき，この関数が狭義の単調関数のとき，この関数の逆関数 $FX)$ が存在し，この $F(X)$ が x の測定値となる．

一般に $X = g(x_0, \Sigma_0)$，$X = h(x, \Sigma_0)$ と書くことができるが，この関数形 $g(x_0, \Sigma_0)$，$h(x, \Sigma_0)$ を決定しているのはユニタリ演算子 $\hat{U}$ であり，$\hat{U}$ を決定しているのは対象とプローブの相互作用である．従って X が x_0 の狭義の単調関数でないとき，あるいは X が x の狭義の単調関数でないとき，その相互作用を用いて $\hat{x}_0$ 測定あるいは $\hat{x}_t$ 測定をすることができない．対象とプローブが上で述べた特別な条件を満たした相互作用をするときに，その相互作用を用いて $\hat{x}_0$ 測定と $\hat{x}_t$ 測定をすることができる．常に $\hat{x}_0$ 測定と $\hat{x}_t$ 測定ができるわけではない．

4　$\sigma(\Sigma_0) > 0$ のときの測定値

最初に固有値が連続の場合を考える．前章で導出したように，$|\phi_0, \xi\rangle = |x_0, \Sigma_0\rangle$ のときの $\hat{x}_0$ と $\hat{x}_t$ の測定値は，それぞれ X の逆関数 $G(X)$，$F(X)$ で与えられる． $\sigma(x_0) > 0$

の場合でも $|\xi\rangle = |\Sigma_0\rangle$ のときには，１回の測定でプローブの状態 $|\Sigma_0\rangle$ と相互作用する対象の状態は，重ね合わせの状態 $\int \phi_0(x_0)|x_0\rangle dx_0$ のうちのどれか１つの状態 $|x_0\rangle$ だけであるから，X の逆関数 $G(X)$，$F(X)$ を用いて x_0 と x の値を測定誤差０で推定することができる．

しかし $\sigma(\Sigma_0) > 0$ のときには，１回の測定で $|\xi_0\rangle = \int \xi_0(\Sigma_0)|\Sigma_0\rangle d\Sigma_0$ のどの成分 $|\Sigma_0\rangle$ と対象が相互作用したのかを我々は知ることができないので，これらの測定値を用いることはできない．

それではこのときの測定値をどのように定義すべきであろうか．明らかなことは，$|\xi\rangle \to |\Sigma_0\rangle$ のとき，$\sigma(\Sigma_0) > 0$ のときの測定値は X の逆関数 $G(X)$，$F(X)$ に一致しなければならないということである．この測定値を決定する１つの有力な方法は，測定誤差が極値（最小値）を与えるように測定値を決定することである．ここではその考えに基づいて $\sigma(\Sigma_0) > 0$ のときの測定値を決定する．最初に $\hat{x}_0$ 測定で X が式（13）で与えられる場合を考える．式（14）より $\sigma(\Sigma_0) = 0$ のとき $G(X)$ は X の１次式であるから，実定数 γ_0 と γ_1 を用いて

$$G(X) = \gamma_0 + \gamma_1 X \tag{22}$$

とする．

最初に関数 $G(X)$ の変化としてパラメータ γ_0 の任意の微小変化 $\delta\gamma_0$ を考え，それに対する測定誤差の２乗 $\epsilon^2(x_0)$ の変化 $\delta\epsilon^2(x_0)$ が０になる場合を考える．

$$\epsilon^2(x_0) = \langle \phi_0, \xi_0 |\, \{G(\hat{X}_t) - \hat{x}_0\}^2 | \phi_0, \xi_0 \rangle \tag{23}$$

であるから，$\delta\epsilon^2(x_0) = 0$ より

$$\langle \phi_0, \xi_0 | \{G(\hat{X}_t) - \hat{x}_0\}\, | \phi_0, \xi_0 \rangle = 0 \tag{24}$$

を得る．これより $\hat{x}_0$ 測定は偏りのない測定になっていることがわかる．$\hat{X}_t$ は式（13）で与えられているから，式（24）が任意の $|\phi_0\rangle$ に対して成立することを要請して

$$\gamma_0 = -\langle g_0 \rangle / \langle g_1 \rangle, \quad \gamma_1 = 1/\langle g_1 \rangle, \quad \langle g_1 \rangle \neq 0$$

を得る．ここで $\langle g_i \rangle$ は演算子 g_i の平均である．従って測定値は

$$G(X) = \frac{X}{\langle g_1 \rangle} - \frac{\langle g_0 \rangle}{\langle g_1 \rangle} \tag{25}$$

となる．$\sigma(\Sigma_0) = 0$ のときの測定値（14）と比較すると，$g_0(\Sigma_0)$ と $g_1(\Sigma_0)$ がそれぞれプローブの状態についての平均 $\langle g_0 \rangle$ と $\langle g_1 \rangle$ になっていることがわかる．この測定値を用いると

$$G(\hat{X}_t) - \hat{x}_0 = \frac{g_0 - \langle g_0 \rangle}{\langle g_1 \rangle} - \frac{g_1 - \langle g_1 \rangle}{\langle g_1 \rangle}\hat{x}_0$$

であるから，確かに任意の $|\phi_0\rangle$ に対して偏りのない測定になっている．

次にパラメータ γ_1 の任意の微小変化に対して測定誤差の２乗 $\epsilon^2(x_0)$ の変化 $\delta\epsilon^2(x_0)$ が０となる条件を考えると，$\frac{\partial \epsilon^2(x_0)}{\partial \gamma_1} = 0$ より

$$\langle \phi_0, \xi_0 | \{G(\hat{X}_t) - \hat{x}_0\} \hat{X}_t | \phi_0, \xi_0 \rangle = 0 \tag{26}$$

を得る．γ_0 の場合と同様に任意の $|\phi_0\rangle$ に対して上の式が成立することを要請すると，３つの条件式が導出される．詳細は補足Ｉに示したが，未知数は γ_0 と γ_1 の２つであるから，

残りの 1 つは $g_0(\Sigma_0)$ と $g_1(\Sigma_0)$ に対する条件式になる．例えば $g_1(\Sigma_0)$ を定数とすると $g_0(\Sigma_0)$ も定数でなければ式（26）を満たす γ_0 と γ_1 は存在しないので，測定値を求めることはできない．従って位置測定で用いた $\hat{X}_t = \beta_1\hat{x}_0 + \beta_2\hat{\Sigma}_0$ で $\beta_2 \neq 0$ の場合には[5), 6), 14)]，$g_0(\hat{\Sigma}_0) = \beta_2\hat{\Sigma}_0$ であるから $\sigma(g_0) = |\beta_2|\sigma(\hat{\Sigma}_0) > 0$ となり，式（26）を満たす測定値は存在しない[注6)]．

これに対して条件 $\frac{\partial\epsilon^2(x_0)}{\partial\gamma_0} = 0$ の場合には $g_0(\Sigma_0)$ と $g_1(\Sigma_0)$ に対する余分な条件式は出てこないので，常に γ_0 と γ_1 を一意的に決定することができる．2 つの条件 $\frac{\partial\epsilon^2(x_0)}{\partial\gamma_0} = 0$ と $\frac{\partial\epsilon^2(x_0)}{\partial\gamma_1} = 0$ を同時に満たさなくても測定理論を構成する際に困難は生じないので，条件 $\frac{\partial\epsilon^2(x_0)}{\partial\gamma_0} = 0$ より一意的に決定される測定値（25）を $\hat{x}_0$ の測定値とすればよい．

$\hat{x}_t$ 測定の場合も，まず式（16）のように X が x の 1 次式で与えられる場合を考察する．このときには X の逆関数 $F(X)$ は X の 1 次式となるので，実定数 γ_0 と γ_1 を用いて測定値を

$$F(X) = \gamma_0 + \gamma_1 X \tag{27}$$

として，測定誤差の 2 乗

$$\epsilon^2(x_t) = \langle\phi_0,\xi_0|\,\{F(\hat{X}_t) - \hat{x}_t\}^2|\phi_0,\xi_0\rangle \tag{28}$$

が極値をとるように定数 γ_0 と γ_1 を決定する．要請 $\frac{\partial\epsilon^2(x_t)}{\partial\gamma_0} = 0$ より

$$\langle\phi_0,\xi_0|\{F(\hat{X}_t) - \hat{x}_t\}|\phi_0,\xi_0\rangle = 0 \tag{29}$$

を得る．これより $\hat{x}_t$ 測定も偏りのない測定になっていることがわかる．

式（13）と（16）より

$$x = f_0(\Sigma_0) + f_1(\Sigma_0)x_0, \tag{30}$$

$$f_0(\Sigma_0) = (g_0(\Sigma_0) - h_0(\Sigma_0))/h_1(\Sigma_0),\ f_1(\Sigma_0) = g_1(\Sigma_0)/h_1(\Sigma_0), \quad h_1(\Sigma_0) \neq 0 \tag{31}$$

を得る．式（29）と（30）を用いると式（29）は

$$\gamma_0 + \gamma_1\langle g_0\rangle - \langle f_0\rangle + \{\gamma_1\langle g_1\rangle - \langle f_1\rangle\}\langle\hat{x}_0\rangle = 0$$

となる．よって任意の $|\phi_0\rangle$ に対して上の式が成立することを要請すると

$$\gamma_0 = \frac{\langle f_0\rangle\langle g_1\rangle - \langle f_1\rangle\langle g_0\rangle}{\langle g_1\rangle}, \quad \gamma_1 = \frac{\langle f_1\rangle}{\langle g_1\rangle}, \quad \langle g_1\rangle \neq 0$$

を得る．従って $\hat{x}_t$ の測定値は

$$F(X) = \frac{\langle f_1\rangle}{\langle g_1\rangle}X + \frac{\langle f_0\rangle\langle g_1\rangle - \langle f_1\rangle\langle g_0\rangle}{\langle g_1\rangle}, \quad \langle g_1\rangle \neq 0 \tag{32}$$

となる．$\sigma(\Sigma_0) = 0$ のときの測定値（17）と比較すると，この測定値は $h_0(\Sigma_0)$ と $h_1(\Sigma_0)$ をそれぞれプローブの状態についての平均 $\langle h_0\rangle$ と $\langle h_1\rangle$ に置き換えたものに等しいことがわかる．

8

この測定値を用いると

$$F(\hat{X}_t) - \hat{x}_t = \frac{\langle f_1\rangle g_1 - f_1\langle g_1\rangle}{\langle g_1\rangle}\hat{x}_0 + \frac{\langle f_1\rangle}{\langle g_1\rangle}(g_0 - \langle g_0\rangle) - (f_0 - \langle f_0\rangle)$$

が成立するから，確かに測定値 $F(X)$ は偏りのない測定になっていることがわかる．

次にパラメータ γ_1 の任意の微小変化に対して測定誤差の 2 乗 $\epsilon^2(x_t)$ の変化が 0 となる条

件を考えると，$\frac{\partial \epsilon^2(x_t)}{\partial \gamma_1} = 0$ より

$$\langle \phi_0, \xi_0 | \{ F(\hat{X}_t) \ - \hat{x}_t \} \hat{X}_t | \phi_0, \xi_0 \rangle = 0 \tag{33}$$

を得る．$\hat{x}_0$ 測定の場合と同様に, 上の式が任意の $|\phi_0\rangle$ に対して成立することを要請すると，３つの条件式が導出される．未知数は γ_0 と γ_1 の２つだけであるから，残りの条件式は $f_0(\Sigma_0)$，$f_1(\Sigma_0)$，$g_0(\Sigma_0)$ と $g_1(\Sigma_0)$ に対する条件式になり，これらがある特別な条件を満たさなければ式（33）を満たす γ_0 と γ_1 は存在しない．従ってこの場合も $\hat{x}_0$ 測定の場合と同様に，条件 $\frac{\partial \epsilon^2(x_t)}{\partial \gamma_0} = 0$ より一意的に決定される測定値（32）を $\hat{x}_t$ の測定値とすればよい.

式（13）と（16）で与えられているように，X が x_0 の 1 次式あるいは x の 1 次式のときには，X の逆関数 $G(X)$，$F(X)$ はそれぞれ式（14）と（17）で与えられているように X の 1 次式になる．そして式（25）と（32）で与えられているように，$\sigma(\Sigma_0) > 0$ のときの $\hat{x}_0$ と $\hat{x}_t$ の測定値 $G(X)$ と $F(X)$ は，$\sigma(\Sigma_0) = 0$ のときの測定値（14）と（17）における $g_0(\Sigma_0)$，$g_1(\Sigma_0)$，$h_0(\Sigma_0)$，$h_1(\Sigma_0)$ をそれぞれプローブの初期状態 $|\xi_0\rangle$ についての平均 $\langle \xi | g_0(\hat{\Sigma}_0) | \xi \rangle$ 等に置き換えたものになっている．しかし 3 章で述べたように，X が x_0 の 1 次式でなくても，x_0 の狭義の単調関数であれば，X と x_0 は 1 対 1 対応しているので，X の逆関数 $G(X)$ が一意的に存在し，それが $\hat{x}_0$ 測定の測定値となる．具体例を挙げると，X が x_0 の 2 次関数 $X = g_0 + g_1 x_0 + g_2 x_0^2$ で定義域を実数全体としたとき X の逆関数は存在しないが，x_0 の 3 次関数 $X = 3x_0 + 3x_0^3$ のときには，この関数は単調増加であるから逆関数が存在し，逆関数 $G(X) = X/3 - X^3/81 + \cdots$ を得る．ここで $G(X)$ は X の無限級数で，すべての実数 X で収束する.

一般的には X が x_0 の単調関数であるとき，その逆関数 $G(X)$ が一意的に存在する. $G(X)$ は測定値を与える関数であるから，X の滑らかな関数であり任意の実数 X に対してマクローリン展開することができる：

$$G(X) = \gamma_0 + \gamma_1 X \ + \gamma_2 X^2 + \cdots . \tag{34}$$

ここで実定数 γ_0 の任意の微小変化 $\delta\gamma_0$ に対する測定誤差の 2 乗 $\epsilon^2(x_0)$ の変化が0になるという要請をすると，任意の $|\phi_0\rangle$ に対して式（24）が成立する．よって式（34）の $G(X)$ を測定値としたとき $\hat{x}_0$ 測定は偏りのない測定となる.

具体的に式（34）の $G(X)$ を求めるには次のようにする．X における x_0 の最高次数が x_0^m，$(m \geq \ 2)$ のときには，そのまま X を x_0^m の項までの和で表わし，X が x_0 の無限級数のときには x_0^m の項までの和で近似する．逆関数 $G(X)$ は X^n $(n \geq m)$ の項までの和で近似する：

$$X \ = \ g_0 + g_1 x_0 + \ g_2 x_0^2 + \cdots + g_m x_0^m, \tag{35}$$

9

$$G(X) \ = \ \gamma_0 + \gamma_1 X + \ \gamma_2 X^2 + \cdots + \gamma_n X^n. \tag{36}$$

これらの式を式（24）に代入し，定数項，$\langle \hat{x}_0 \rangle$ の項の係数，$\cdots$，$\langle \hat{x}_0^n \rangle$ の項の係数を0と置くことによって，$n+1$ 個の連立 1 次方程式を得ることができる．未知数は γ_0，γ_1，$\cdots$，γ_n の $n+1$ 個であるから，$n+1$ 個の連立 1 次方程式を解くことによって，γ_0，γ_1，$\cdots$，γ_n を求めることができる：

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

上の行列を A としたとき，成分 $a_{i,j}$ は定数，g_0，g_1，$\cdots$，g_m の積をプローブの初期状態 $|\xi_0\rangle$ で平均したものになっている．例えば $a_{1,1}=1$，$a_{1,2}=\langle g_0\rangle$，$\cdots$，$a_{1,n+1}=\langle g_0^n\rangle$，$a_{1,2}=\langle g_1\rangle$，$a_{2,2}=2\langle g_0 g_1\rangle$ 等である．$\mathrm{detA}=0$ のとき A の逆行列が存在しないので，γ_0，γ_1，$\cdots$，γ_n を求めることができない．このときにはユニタリ演算子 $\hat{U}$ を用いて $\hat{x}_0$ 測定をおこなうことができない．

この方法では x_0^{m+1} 以上の高次の項及び X^{n+1} 以上の高次の項を無視する近似をおこなっているので，得られた測定値 $G(X)$ の精度に不安がある．しかし精度をよくするためには，次数 m，n の値を大きくすればよい．今は $\sigma(\Sigma_0)>0$ の場合を議論しているので，測定誤差は0ではないが，この測定誤差の大きさよりも $G(x)$ の精度を充分小さくすれば問題はない．

$\hat{x}_t$ 測定の場合も $\hat{x}_0$ 測定と同様に考えることができる．一般的には X が x の単調関数のときには，その逆関数 $F(X)$ が存在する．$F(X)$ をマクローリン展開し

$$F(X)=\gamma_0+\gamma_1 X+\gamma_2 X^2+\cdots. \tag{37}$$

実定数 γ_0 の任意の微小変化 $\delta\gamma_0$ に対する測定誤差の２乗 $\epsilon^2(x_t)$ の変化が0になるという要請をすると，任意の $|\phi_0\rangle$ に対して式（29）を得る．よって式（37）の $F(X)$ を測定値としたとき $\hat{x}_t$ 測定は偏りのない測定となる．具体的に式（37）の $F(X)$ を求める方法も上で述べた方法を使うことができる．

固有値が離散的な場合も上と同様にして測定値 $G(X_l)$，$F(X_l)$ を求めることができる．固有値が連続のときの上の議論で，定数項，$\langle\hat{x}_0\rangle$ の項の係数，$\cdots$，$\langle\hat{x}_0^n\rangle$ の項の係数を０と置くことができたのは，任意の実数の固有値 x_0 に対して

$$f_0+f_1x_0+f_2x_0^2+\cdots+f_nx_0^n=0$$

が成立しているとき，$f_0=f_1=\cdots=f_n=0$ となるからである．固有値が離散的なときには，$\hat{x}_0$ の $n+1$ 個の固有値 x_i，$i=1,2,\cdots,n+1$ に対して

$$f_0+f_1x_i+f_2x_i^2+\cdots+f_nx_i^n=0$$

が成立しているとき，$f_0=f_1=\cdots=f_n=0$ となることを用いることができる．

5　Bornの確率則の導出

10

ここでは３章で定義した $\hat{x}_0$ の測定値を用いたとき，Bornの確率則を導出できることを示す．最初に固有値が離散的な場合を考察する．$\hat{x}_0$ の測定値の２乗は

$$\epsilon^2(x_0)=\langle\phi_0,\xi_0|\,\{G(\hat{X}_t)-\hat{x}_0\}^2|\phi_0,\xi_0\rangle=\sum_{i,j}\{G(X_l)-x_i\}^2|\,\phi_0(x_i)|^2|\xi_0(\Sigma_j)|^2$$

で与えられる．ここで X_l は式（18）あるいは x_i のより高次の項まで展開した式で与えられている．$|\xi_0\rangle=|\Sigma_{\bar{j}}\rangle$ のときの X_l を $X_{\bar{l}}$ とすると，

$$\epsilon^2(x_0)=\sum_i\{G(X_{\bar{l}})-x_i\}^2|\phi_0(x_i)|^2.$$

ここで $G(X_{\bar{l}})=x_i$ となるように $G(X_{\bar{l}})$ を定義しているので，任意の $|\phi_0\rangle$ に対して $\epsilon(x_0)=0$ となる．$|\xi_0\rangle=|\Sigma_{\bar{j}}\rangle$ のとき

$$\hat{U}|\phi_0,\xi_0\rangle=\sum_{i,j}\hat{U}\,|x_i,\Sigma_j\rangle\phi_0(x_i)\xi_0(\Sigma_j)=\sum_i\hat{U}|x_i,\Sigma_{\bar{j}}\rangle\phi_0(x_i)=\sum_i e^{i\delta}|x_{\bar{k}},X_{\bar{l}}\rangle\phi_0(x_i) \quad (38)$$

となる．ここで $|\xi_0\rangle=|\Sigma_{\bar{j}}\rangle$ のときの x_k を $x_{\bar{k}}$ とした．式（38）より $\hat{X}_t$ の測定値が $X_{\bar{l}}$ である確率は $|\phi_0(x_i)|^2$ であることがわかる．式（12）よりこのときの測定値 $G(X_{\bar{l}})$ は x_i である．すなわち測定誤差0でオブザーバブル $\hat{x}_0$ を測定したとき，測定値が x_i をとる確率は $|\phi_0(x_i)|^2$ である．これはまさにBornの確率則である．QED.

次に固有値が連続である場合を考察する．このとき $\hat{x}_0$ の測定誤差の２乗は

$$\epsilon^2(x_0)=\int\{G(X)-\ x_0\}^2|\phi_0(x_0)|^2|\xi_0(\Sigma_0)\ |^2dx_0d\Sigma_0.$$

$|\xi_0\rangle=|\bar{\Sigma}_0\rangle$ のときの X を $\bar{X}$ とすると，

$$\epsilon^2(x_0)=\int\{G(\bar{X})-\ x_0\}^2|\phi_0(x_0)|^2dx_0.$$

ここで $G(\bar{X})=x_0$ となるように $G(\bar{X})$ を定義しているので，任意の $|\phi_0\rangle$ に対して $\epsilon(x_0)=0$ となる．$|\xi_0\rangle=|\bar{\Sigma}_0\rangle$ のとき $\hat{X}_t$ の測定値 X が区間 $\Delta X=\{X|\bar{X}-\delta X/2 \le X\le\bar{X}+\delta X/2\}$ にあるとき，測定値 $G(X)=x_0$ は区間 $\Delta x_0=\{x_0|\bar{x}_0-\delta x_0/2 \le x_0\le\bar{x}_0+\delta x_0/2\}$ にあることがわかる．ここで $\bar{x}_0=\alpha(\bar{\Sigma}_0,\bar{X})$ である．従って

$$P(\bar{X})\delta X=\ |\phi_0(\bar{x}_0)|^2\delta x_0 \quad (39)$$

が成立しているとき、Bornの確率則が成立していることがわかる．$x=\beta(\Sigma_0,X)$ と書くことができるので[注7)]，$dx=|\frac{\partial\beta}{\partial\Sigma_0}|d\Sigma_0$. よって

$$P(X)\equiv\int|\phi_0(x_0)|^2|\xi(\Sigma_0)|^2dx=|\phi_0(\bar{x}_0)\ |^2|\frac{\partial\beta}{\partial\Sigma_0}|_{\Sigma_0=\bar{\Sigma}_0}|.$$

さらに $X=g(x_0,\Sigma_0)$ で，Σ_0 は $\bar{\Sigma}_0$ の値しかとらないから，

$$\delta X=|\frac{\partial g}{\partial x_0}|_{\Sigma_0=\bar{\Sigma}_0}|\delta x_0.$$

従って

$$|\frac{\partial\beta}{\partial\Sigma_0}|_{\Sigma_0=\bar{\Sigma}_0}|\ |\frac{\partial g}{\partial x_0}|_{\Sigma_0=\bar{\Sigma}_0}|=1 \quad (40)$$

11

が成立しているとき，式（39）が成立していることがわかる．

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}=\frac{\partial\beta}{\partial X}\frac{\partial g}{\partial x_0},\ \frac{\partial x}{\partial\Sigma_0}=\frac{\partial\beta}{\partial\Sigma_0}+\frac{\partial\beta}{\partial X}\frac{\partial g}{\partial\Sigma_0}$$

を用いると，$\hat{U}$ がユニタリ演算子である条件は

$$|\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial X}{\partial \Sigma_0}-\frac{\partial x}{\partial \Sigma_0}\frac{\partial X}{\partial x_0}| = -\frac{\partial X}{\partial x_0}\frac{\partial \beta}{\partial \Sigma_0}=\pm 1.$$

これより式（40）が成立していることがわかる．従って式（39）が成立するので，Bornの確率則を再現している．QED.

6　Heisenbergの不確定性原理の導出

ここでは３章と４章で定義した測定値を用いたとき，Heisenbergの不確定性関係式（5）が導出できることを示す．$\hat{x}_t$ の測定値を与える演算子を $F(\hat{X})\equiv(\hat{x}_t)_{\rm m}$ とかくと，$\hat{x}_t$ の測定誤差 $\epsilon(x_t)$ の２乗は

$$\epsilon^2(x_t)=\langle\phi_0,\xi_0|\{(\hat{x}_t)_{\rm m}-\hat{x}_t\}^2|\phi_0,\xi_0\rangle \tag{41}$$

で与えられる．また $\hat{x}_t$ 測定が測定対象のオブザーバブル $\hat{y}_0$ に与える擾乱 $\eta(y_0)$ の２乗は

$$\eta^2(y_0)=\langle\phi_0,\xi_0|\{\hat{y}_t-\hat{y}_0\}^2|\phi_0,\xi_0\rangle \tag{42}$$

で定義される．

２つの任意のオブザーバブル $\hat{A}$ と $\hat{B}$ に対して

$$\sigma(A)\sigma(B)\geq\frac{1}{2}|\langle\phi_0,\xi_0|[\,\hat{A},\ \hat{B}\,]|\phi_0,\xi_0\rangle|,$$

が成立する[15)]．標準偏差の定義から

$$\langle\phi_0,\xi_0|\hat{A}^2|\phi_0,\xi_0\rangle=\ \sigma^2(A)+\langle\phi_0,\xi_0|\hat{A}|\ \phi_0,\xi_0\rangle^2\geq\sigma^2(A)$$

が成立するから，上の式より

$$(\langle\phi_0,\xi_0|\hat{A}^2|\phi_0,\xi_0\rangle)^{1/2}\,(\langle\phi_0,\xi_0|\hat{B}^2|\phi_0,\xi_0\rangle)^{1/2}\ \geq\ \frac{1}{2}|\langle\phi_0,\xi_0|[\,\hat{A},\ \hat{B}\,]\,|\phi_0,\xi_0\rangle|, \tag{43}$$

$$\sigma(A)(\langle\phi_0,\xi_0|\hat{B}^2|\phi_0,\ \xi_0\rangle)^{1/2}\ \geq\ \frac{1}{2}|\langle\phi_0,\ \xi_0|[\,\hat{A},\ \hat{B}\,]|\phi_0,\xi_0\rangle|, \tag{44}$$

$$(\langle\phi_0,\xi_0|\hat{A}^2|\phi_0,\xi_0\rangle)^{1/2}\,\sigma(A)\ \geq\ \frac{1}{2}|\langle\phi_0,\xi_0|\,[\,\hat{A},\ \hat{B}\,]|\phi_0,\xi_0\rangle| \tag{45}$$

を得る．３章と４章で明らかにしたように，そこで定義された測定値を用いたときには $\hat{x}_t$ 測定は偏りのない測定になっているから，任意の $|\phi_0\rangle$ に対して

$$\langle\phi_0,\xi_0|\{(\hat{x}_t)_{\rm m}-\hat{x}_t\}|\phi_0,\xi_0\rangle_\kappa=0 \tag{46}$$

が成立する．ここで $\langle\phi_0,\xi_0|\cdots|\phi_0,\xi_0\rangle_\kappa$ はプローブの変数 Σ_0（Σ_j）についての積分（和）を意味している．$[\,(\hat{x}_t)_{\rm m},\ \hat{y}_t\,]=0$ であるから，

$$[\,(\hat{x}_t)_{\rm m}-\hat{x}_t,\ \hat{y}_t-\hat{y}_0\,]\ =-[\,\hat{x}_t,\hat{y}_t\,]-\ [\,(\hat{x}_t)_{\rm m}-\hat{x}_t,\ \hat{y}_0\,].$$

従って式（43）を用いて，任意の測定に対して不確定性関係（5）が成立している．

Heisenbergが考察したように，オブザーバブル $\hat{x}_0$ と $\hat{y}_0$ がそれぞれ位置演算子 $\hat{q}_0$，運動量演算子 $\hat{p}_0$ のときには，$[\,\hat{q}_t,\ \hat{p}_t\,]=\ \hat{U}^\dagger[\,\hat{q}_0,\ \hat{p}_0\,]\hat{U}={\rm i}\hbar$ であるから，不確定性関係は

$$\epsilon(q_t)\eta(p_0)\geq\frac{\hbar}{2} \tag{47}$$

となる．

ついでに $\hat{x}_0$ 測定が満たす不確定性関係を導出する．１章で述べたように，不確定性関係

(3) は一般に成立しない．$[\,G(\hat{X}_t),\ \hat{y}_t\,]=0$ であるから，

$$[\,G(\hat{X}_t),\ \hat{y}_t-\hat{y}_0\,]=[\,G(\hat{X}_t),\ -\hat{y}_0\,]=[\,G(\hat{X}_t)-\hat{x}_0,\ -\hat{y}_0\,]-[\,\hat{x}_0,\ \hat{y}_0\,].$$

３章と４章で明らかにしたように，そこで定義された測定値を用いたときには $\hat{x}_0$ 測定は偏りのない測定になるから，任意の $|\phi_0\rangle$ に対して

$$\langle\phi_0,\xi_0|\{G(\hat{X}_t)-\hat{x}_0\}|\phi_0,\xi_0\rangle_\kappa=0 \tag{48}$$

が成立する．従って式 (44) から

$$\sigma((x_0)_{\mathrm{m}})\eta(y_0)\geq\frac{1}{2}|\langle\phi_0|[\,\hat{x}_0,\ \hat{y}_0\,]|\phi_0\rangle| \tag{49}$$

を得ることができる．ここで $\sigma((x_0)_{\mathrm{m}})$ は測定値演算子 $(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}=G(\hat{X}_t)$ の標準偏差である．これが $\hat{x}_0$ 測定が満たす不確定性関係である．

7　まとめと考察

本論文では量子測定で用いるべき測定値を導出した．最初に全体系の初期状態が $|x_0,\Sigma_0\rangle$ の場合を考察し，この場合には測定誤差が0となるように測定値を定義するのが合理的であると考え，測定値 (14)，(17)，(20)，(21) を得た．一般的には X が x_0 の狭義の単調関数のとき，その逆関数 $G(X)$ が存在し，その $G(X)$ が x_0 の測定値となる．$\hat{x}_t$ 測定の場合も同様である．

このようにして導出された測定値 $G(X)$，$G(X_l)$ を用いると，Bornの確率則が再現できることを５章で証明した．Bornの確率則が正しいことは多くの量子実験で実証されているので，量子測定理論はBornの確率則を再現するように構成されていなければならない．正しい測定値を用いなければ $|\xi_0\rangle=|\Sigma_0\rangle$ あるいは $|\Sigma_i\rangle$ の場合でも任意の状態 $|\phi_0\rangle$ に対して測定誤差 $\epsilon(x_0)=0$ とならず，Bornの確率則が再現できないことを強調しておきたい．測定値の定義が間違っていると本来0になる測定誤差が0にならなくなり，そのためすべての $|\phi_0\rangle$ に対して $\epsilon(x_0)=0$ とならないからである．

$\sigma(\Sigma_0)>0$ のときの測定値は少し違った観点から導出された．測定値を $G(X)=\gamma_0+\gamma_1X+\gamma_2X^2+\cdots$ と展開したとき，関数 $G(X)$ の微小変化として $\delta\gamma_0$ を考える．任意の $\delta\gamma_0$ に対する測定誤差の２乗 $\epsilon^2(x_t)$ の変化が任意の $|\phi_0\rangle$ に対して0となるように要請すると，γ_0，γ_1，$\cdots$を決定することができる．このようにして得られた $G(X)$ を用いた測定は偏りのない測定となる．$\hat{x}_t$ 測定の測定値 $F(X)$ も同様に決定することができ，偏りのない測定となる．

６章において，このようにして得られた測定値を用いたとき，Heisenbergの測定過程の不確定性関係 (5) が成立していることを証明した．さらに $\hat{x}_0$ 測定の場合には，本論文で得られた測定値が満たす不確定性関係は式 (49) であることを示した． 13

関係式 (3) をHeisenbergの不確定性関係式とみなす研究者もいるが，筆者は１章においてHeisenbergの論文及び著書の主張を詳しく分析し，彼が考えていた関係式は (5) であると結論した．Heisenbergが二つの測定誤差 $\epsilon(x_0)$ と $\epsilon(x_t)$ を区別していなかったことは事実である．当時は量子力学が完成したばかりで，von Neumannの射影仮説[16] が正しいと一般

に考えられていた．筆者の理論では射影仮説が正しいとき，以下に示すように $\epsilon(x_0)=\epsilon(x_t)$ が成立している．von Neumannの射影仮説によれば測定誤差 $\epsilon(x_0)=0$ でオブザーバブル $\hat{x}_0$ を測定して，測定値 x_0 を得たとき，測定後の対象の状態は $|x_0\rangle$ となる．3章で示したように，対象とプローブの初期状態がそれぞれ $\hat{x}_0$ と $\hat{\Sigma}_0$ の固有状態 $|x_0\rangle$，$|\Sigma_0\rangle$ であるとき，$\epsilon(x_0)=0$ となり $\hat{x}_0$ の測定値は x_0 となる．このとき相互作用後の全系の状態は式（7）で与えられているから，この式で $x=x_0$ でなければならない：$\hat{U}|x_0,\Sigma_0\rangle=e^{i\delta}|x,X\rangle$ $=e^{i\delta}|x_0,X\rangle$．これより $\hat{x}_t|x_0,\Sigma_0\rangle=x_0|x_0,\Sigma_0\rangle$ が導出できる．この式は任意の $|x_0,\Sigma_0\rangle$ に対して成立しているから，

$$\hat{x}_t=\hat{x}_0 \tag{50}$$

である．いま対象とプローブの初期状態がそれぞれ $|x_0\rangle$，$|\Sigma_0\rangle$ である場合を考察して式（50）を導出したが，演算子の関係式は時間発展演算子 $\hat{U}$ によって決定され，対象とプローブの初期状態にはよらない．従って測定誤差が0でなくても式（50）が成立しているので，一般に $\epsilon(x_0)=\epsilon(x_t)$ が成立している．すなわち射影仮説が成立しているとき，$\hat{x}_0$ の測定誤差 $\epsilon(x_0)$ と $\hat{x}_t$ の測定誤差 $\epsilon(x_t)$ は等しくなるから，両者を区別する必要はない．このとき $\hat{x}_0$ と $\hat{y}_0$ がそれぞれ位置演算子，運動量演算子であれば，$[\hat{x}_t,\hat{y}_t]=[\hat{x}_0,\hat{y}_0]=\mathrm{i}\hbar$ であるから，Heisenbergの不確定性関係（3）は成立している．

現代では射影仮説が一般に成立するとは考えられていないので，２つの測定誤差を区別しなければならない．そしてこのときには，本文で明らかにしたようにHeisenbergの不確定性関係は式（3）ではなく，式（5）と解釈するのが妥当である．当時のHeisenbergの考察の中心には，測定後の電子がKennard-Robertsonの不確定性関係を満たすためには，どのような測定過程の不確定性関係が成立していなければならないのかという問題意識があった．このことと測定後の電子の状態を決定しているのは測定誤差 $\epsilon(x_0)$ ではなく $\epsilon(x_t)$ であることから，このように結論することができる．

補足 I

$\hat{x}_0$ 測定のとき式（13）のように X が x_0 の1次式，測定値 $G(X)$ が式（22）のように X の1次式で与えられる場合を考える．パラメータ γ_1 の任意の微小変化 $\delta\gamma_1$ に対して測定誤差の2乗 $\epsilon^2(x_0)$ が極値を与えるという要請から式（26）を得る．この式に式（13）と（22）を代入すると

$$\gamma_0\langle g_0\rangle+\gamma_1\langle g_0^2\rangle+\{\gamma_0\langle g_1\rangle+2\gamma_1\langle g_0g_1\rangle-\langle g_0\rangle\}\langle\hat{x}_0\rangle+\{\gamma_1\langle g_1^2\rangle-\langle g_1\rangle\}\langle\hat{x}_0^2\rangle=0 \tag{51}$$

14

を得る．任意の $|\phi_0\rangle$ に対して成立することを要請して

$$\gamma_0\langle g_0\rangle+\gamma_1\langle g_0^2\rangle=0, \tag{52}$$

$$\gamma_0\langle g_1\rangle+2\gamma_1\langle g_0g_1\rangle-\langle g_0\rangle=0, \tag{53}$$

$$\gamma_1\langle g_1^2\rangle-\langle g_1\rangle=0. \tag{54}$$

4章で述べたようにパラメータ γ_1 の微小変化に対して $\epsilon^2(x_0)$ の変化が0であるという要請から，上の3つの式が導出される．未知数は γ_0 と γ_1 の2つであるから，残りの1つの式は g_0 と g_1 が満たさなければならない条件式となる．具体的には以下のようになる：

式（54）より

$$\gamma_1 = \langle g_1 \rangle / \langle g_1^2 \rangle, \qquad \langle g_1^2 \rangle \neq 0 \tag{55}$$

を得る．これを式（52）に代入して

$$\gamma_0 = -\langle g_0^2 \rangle \langle g_1 \rangle / \ \langle g_0 \rangle \langle g_1^2 \rangle, \quad \langle g_0 \rangle \neq 0. \tag{56}$$

これらの式を式（53）に代入して

$$\langle g_0^2 \rangle \langle g_1^2 \rangle - 2\langle g_0 \rangle \langle g_1 \rangle \ \langle g_0 g_1 \rangle + \langle g_0 \rangle^2 \langle g_1^2 \rangle = 0 \tag{57}$$

を得る．このことは上の条件式を満たした場合にのみ，式（55），（56）の解が意味を持つことを示している．例えば g_1 が定数の場合を考えると，上の条件式より $\sigma(g_0) = 0$ を得る．これより g_0 は定数または $\sigma(\Sigma_0) = 0$ でなければならない．今 $\sigma(\Sigma_0) > 0$ の場合を考察しているので，g_0 は定数でなければならない．以上のことより，g_0 と g_1 が定数のとき式(57)を満足し，そのとき $\delta\epsilon^2(x_0) = 0$ を満たす γ_0， γ_1 を決定することができるが，g_0 が Σ_0 の関数のときには γ_0 と γ_1 を決定できないことがわかる．

注

注１：１回の測定に対してこの式が成立している．従って正確には，この式の両辺にはプローブのオブザーバブル $\hat{X}_t$ の測定値 X が添え字として必要である．

注２：Heisenbergが測定誤差は測定後の電子の位置の不確定さを決定していると考えていたことをOzawaも指摘している[17]．しかしOzawaはHeisenbergの測定誤差を $\epsilon(x_0)$ とみなしているので，$\epsilon(x_0) \geq \sigma(x_t)$ が成立しているというHeisenbergの主張は間違っていると結論している．しかし筆者はHeisenbergの測定誤差を $\epsilon(x_t)$ とみなせば，Heisenbergの主張を矛盾なく理解することができるので，Heisenbergの測定誤差を $\epsilon(x_t)$ とみなすべきであると考えている．更にOzawaはHeisenbergの不確定性関係は式（5）であるとの筆者の主張に対して，Heisenbergの不確定性関係を式（5）とみなすと，Heisenbergの不確定性関係は運動量を擾乱しないで位置測定の誤差を小さくすることを制限しているという一般的な見解に矛盾していると述べている[18]．しかしHeisenbergの元々の不確定性関係が式（3）なのか式（5）であるのかという問題には，一般的な見解に基づくのではなくHeisenbergが論文や著書で述べていることに基づいて解答しなければならないと筆者は考える．

注３：しかし実際にはそのようになっていない．固有値が連続の場合で説明をすると，$\sigma(x_0) \gg \sigma(\Sigma_0)$ のときには $x = \beta(\Sigma_0, X)$，$x_0 = u(x, X) = u(\beta(\Sigma_0, X), X)$ として，プローブのオブザーバブル $\hat{X}_t$ の測定値が X である確率密度は $P(X) = |\phi_0(u(\beta(\langle \hat{\Sigma}_0 \rangle,\ X), X))|^2 \left|\frac{\partial \beta}{\partial \Sigma_0}\Big|_{\Sigma_0 = \langle \hat{\Sigma}_0 \rangle}\right|$ となるので，$P(X)$ から $|\phi_0(x_0)|^2$ の分布を知ることができる．しかし $\sigma(x_0) \ll \sigma(\Sigma_0)$ のとき，$x = \alpha(x_0, X)$，$\Sigma_0 = v(\alpha(x_0, X), X)$ として $P(X) = |\xi_0(v(\alpha(\langle \hat{x}_0 \rangle, X), X))|^2 \left|\frac{\partial \alpha}{\partial x_0}\Big|_{x_0 = \langle \hat{x}_0 \rangle}\right|$ となるので，$P(X)$ から知ることができるのは $|\phi_0(x_0)|^2$ ではなく $|\xi_0(\Sigma_0)|^2$ の分布である．理論的測定値を使わなければならないのは $\sigma(x_0) \ll \sigma(\Sigma_0)$ の場合であるが，上で述べたように，このとき $P(X)$ より $|\phi_0(x_0)|^2$ を知ることはできない．

注４：このことは，非直接測定モデルではプローブ演算子 $\hat{X}_t$ の測定値 X の値を用いて $\hat{x}_0$ の測定値を求めているから，測定値は X の関数になっていなければならないが，今の場合 X の関数になっていないことからもわかる．

注５：式（７）の $|\Sigma_0\rangle$ は $\hat{\Sigma}_0$ の固有状態，また $|X\rangle$ は $\hat{X}_0$ の固有状態であるから，誤解を避ける

ためには，その表記を変えなければならない．しかし誤解を招きそうな箇所はないので，そのままにする．

注６：上で $\hat{X}_t=\beta_1\hat{x}_0+\beta_2\hat{\Sigma}_0$，$(\sigma(\Sigma_0)>0)$ の場合には，３つの条件式を満たす測定値が存在しないことを明らかにした．しかし未知数は γ_0 と γ_1 の２つであるから，低次の条件式(52)と(53)のみを用いて γ_0 と γ_1 を求めればよいという立場もある．しかしこのときにも① $\beta_2=0$ のとき② $\beta_2\neq 0$ かつ $\langle\hat{\Sigma}_0\rangle=0$ のとき③ $\beta_2\neq 0$ かつ $\sigma^2(\Sigma_0)=\langle\hat{\Sigma}_0\rangle^2$ のときのいずれの場合も、γ_1 の値を求めることができないことがわかる．

注７：X を Σ_0 と x の関数としたとき，次に示すように X は Σ_0 と x 両方の関数になっている．まず X が x のみの関数 $q(x)$ のとき，式（７）を用いて $\hat{X}_t=q(\hat{x}_t)$ を導出することができる．測定対象の演算子 $q(\hat{x}_t)$ がプローブの演算子 $\hat{X}_t$ に等しくなることはないから，これは矛盾である．また X が Σ_0 のみの関数のとき，X の値を用いて x の値を推定することはできないから，この相互作用を用いて $\hat{x}_t$ 測定をおこなうことはできない．以上のことから，X は Σ_0 と x 両方の関数でなければならない．

引用文献

（１）W. Heisenberg, “Uber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik”, Zeitschrift fur Physik 43, 1927, p.172-198.
湯川秀樹・井上健編『現代の科学Ⅱ／量子論的な運動学と力学の直観的内容について』，中央公論社，1974, p.325-358.

（２）W. Heisenberg, The Physical Principles of the Quantum Theory, University of Chicago Press, Chicago, 1930, reprinted by Dover, New York, 1949, 1967.
ハイゼンベルグ，玉木英彦・遠藤真二・小出昭一郎訳『量子論の物理的基礎』，みすず書房，1954.

（３）E. H. Kennard, Z. Phys. **44**, 326（1927）.

（４）H. P. Robertson, Phys. Rev. **34**, 163（1929）.

（５）S. Kosugi, Prog. Theor. Phys. **123**, 431（2010）.

（６）小杉誠司「Heisenbergの不確定性原理における位置の測定値の不確定性」，『淑徳短期大学研究紀要』 第50号，2011, p.145-158.

（７）M. Ozawa, “Position measuring interactions and the Heisenberg uncertainty principle”, Phys. Lett. A299, 2002, p.1-7.

（８）Jacqueline Erhart, Stephan Sponar, Georg Sulyok, Gerald Badurek, Masanao Ozawa, Yuji Hasegawa, Nature Physics **8**, 185（2012）.

（９）S.-Y. Baek, F. Kaneda, M. Ozawa, and K. Edamatsu, Sci. Rep. **3**, 2221（2013）.

16 (10) F. Kaneda, S.-Y. Baek, M. Ozawa, and K. Edamatsu, Phys. Rev. Lett. **112**, 020402（2014）.

(11) S. Kosugi, Phys. Rev. A **82**, 022118（2010）.

(12) 小杉誠司「自由粒子の移動距離の測定における標準量子限界」，『淑徳短期大学研究紀要』第52号，2013, p.197-210.

(13) W. M. de Muynck, “Foundation of Quantum Mechanics, an Empiricist Approach”, Kluwer Academic Publishers, 2002, p.209.

（14）小杉誠司「量子測定理論における測定値」，『淑徳大学短期大学部研究紀要』第55号，2016, p.1-15.
（15）A. Messiah, Quantum Mechanics, Dover Publications, 1999.
（16）J. von Neumann, “Mathematical Foundations of Quantum Mechanics”, Princeton University Press, 1955.
（17）M. Ozawa, J. Phys. Conf. Ser. **504**, 012024（2014）.
（18）M. Ozawa, arXiv: 1505.05014v1［quantum-ph］.

17