

Heisenbergの不確定性原理における 位置測定誤差

小 杉 誠 司

(2008年9月21日受理)

要 約

測定過程に関連したHeisenbergの不確定性原理に対する小澤の批判を考察し、小澤が定義した測定値が正しくないために、小澤の理論にはいくつかの不合理的な点が存在することを指摘した。本論文で明らかにした正しい測定値を用いれば、これらの問題は生じない。EPRがおこなった粒子2の位置測定の結果から粒子1の位置測定をおこなう間接測定の場合には、Heisenbergの不確定性関係を一般化した小澤の不等式は成立していない。

キーワード 不確定性関係、測定誤差、運動量の擾乱、小澤の不等式、観測の理論

1 はじめに

1927年にHeisenbergが提唱した不確定性原理は、量子力学の最も重要な帰結の一つであると同時に、量子力学の物理的解釈において非常に重要な役割を果たした。

多くの量子力学の教科書では、位置演算子 \hat{q} と運動量演算子 \hat{p} が満たす交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ を用いて、 \hat{q} と \hat{p} の標準偏差 $\sigma(q) = \langle (\hat{q} - \langle \hat{q} \rangle)^2 \rangle^{1/2}$ と $\sigma(p) = \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle^{1/2}$ の積の間に不等式

$$\sigma(q)\sigma(p) \geq \hbar/2 \quad (1)$$

を導出し、これを不確定性関係と呼んでいる。ここで $\langle \hat{A} \rangle$ は演算子 \hat{A} の粒子の状態についての平均値を表す。この関係式は交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ を用いて、簡単に導出することができる。

それに対して、Heisenbergが有名な γ 線顕微鏡を用いて電子の位置を測定する思考実験^{1,2)} で証明した別の不確定性関係

$$\epsilon(q)\eta(p) \geq \hbar/2 \quad (2)$$

が存在する。ここで $\epsilon(q)$ は対象粒子の位置測定によって得られた測定値の不確定さで

あり, $\eta(p)$ はこの位置測定によって引き起こされた粒子の運動量の擾乱 (disturbance) である. この不等式が一般的に成立することは, まだ証明されていない.

Braginsky等も指摘しているように³⁾, 不等式 (1) は, 量子力学的対象がある任意の状態にあるときに, その対象の位置測定を繰り返しおこなったときの測定結果の統計的なゆらぎである標準偏差 $\sigma(q)$ と, 同じ状態にある対象の運動量の測定を繰り返しおこなったときの測定結果の標準偏差 $\sigma(p)$ との関係を表している. それに対して, 不等式 (2) は位置測定のプロセスに関連していて, 位置測定によって得られた測定値の不確定さとそれによって引き起こされる運動量の擾乱との関係を表している. 同じように不確定性関係と呼ばれているが, 不等式 (1) と (2) の意味していることは違っている.

本論文では式 (2) の不確定性関係について考察する. 小澤はHeisenbergの不確定性関係 (2) を吟味し, この関係式を破る2つの位置測定の例を挙げて, 一般的には不確定性関係が成立しないこと示した. 更に小澤は不確定性関係を再定式化し, 一般の位置測定に対して成立する小澤の不等式を提示した.

既に前論文⁴⁾において小澤の不等式について考察しているが, そこでは小澤の不等式の妥当性については触れずに, 細谷と石井が小澤の不等式を光子箱の思考実験に適用した論文について考察した. 本論文では, 小澤の不等式の批判的考察をおこなう.

2 小澤のHeisenbergの不確定性関係への批判

小澤は位置 \hat{x}_0 と運動量 \hat{p}_0 を持った1次元の対象粒子の位置測定を考えた.^{5,6)} 測定装置の一部であるプローブ (probe) と対象粒子が, 時刻0で相互作用を始め時刻 t に相互作用を終えるとする. その直後にプローブの位置 \hat{X}_t を, 別の測定装置によって測定することによって, 対象粒子の位置の測定結果を得る. 測定装置はプローブ, 増幅装置, 表示装置などで構成されていて, プローブが受け取った信号を増幅することによって人間が測定値として認識できるようになる. \hat{X}_t の測定は正確におこなうことができること, \hat{X}_t の測定が対象粒子の運動量を擾乱することはないと仮定されている.

小澤は次のような対象粒子とプローブの相互作用を考えた:

$$\hat{H} = \frac{K\pi}{3\sqrt{3}}(2\hat{x}_0\hat{P}_0 - 2\hat{p}_0\hat{X}_0 + \hat{x}_0\hat{p}_0 - \hat{X}_0\hat{P}_0). \quad (3)$$

ここで \hat{X}_0 と \hat{P}_0 は, それぞれ $t = 0$ でのプローブの位置, 運動量である. 結合定数 K は非常に大きく, その結果, 対象粒子とプローブの運動エネルギーを無視することができることと仮定されている. 更に計算の便宜のために $Kt = 1$ と仮定されている.

時間発展演算子 $\hat{U} = \exp(-i\hat{H}t/\hbar)$ を使い, Heisenbergの運動方程式を解くと,

$$\hat{X}_t = \hat{x}_0, \quad \hat{x}_t = \hat{x}_0 - \hat{X}_0, \quad (4)$$

$$\hat{P}_t = \hat{p}_0 + \hat{P}_0, \quad \hat{p}_t = -\hat{P}_0 \quad (5)$$

を得る．ここで \hat{X}_t は時刻 t におけるプローブの位置演算子であり， $\hat{X}_t = \hat{U}^\dagger \hat{X}_0 \hat{U}$ である．その他の時刻 t における演算子も同様に定義されている．また演算子 \hat{x}_0 ， \hat{X}_0 などは，正確には $\hat{x}_0 \otimes \hat{I}$ ， $\hat{I} \otimes \hat{X}_0$ とかくべきであるが，誤解することはないと思うので，ここでは簡略する．

対象粒子の運動量の変化は

$$\hat{D}(p) = \hat{p}_t - \hat{p}_0 \quad (6)$$

であり，プローブによる位置測定が対象粒子に与えた運動量の擾乱は

$$\eta(p_0) = \{\langle \phi_0, \xi_0 | \hat{D}(p)^2 | \phi_0, \xi_0 \rangle\}^{1/2} \quad (7)$$

で定義されている．ここで $|\phi_0\rangle$ ， $|\xi_0\rangle$ はそれぞれ $t = 0$ における対象粒子とプローブの状態ベクトルである．

小澤は位置測定の誤差を

$$\epsilon(x_0) = \langle \phi_0, \xi_0 | \hat{N}(x_0)^2 | \phi_0, \xi_0 \rangle^{1/2} \quad (8)$$

で定義した．ここでノイズ演算子 $\hat{N}(x_0)$ は

$$\hat{N}^{Ozawa}(x_0) = \hat{X}_t - \hat{x}_0 \quad (9)$$

で定義されている．

従って，位置測定の誤差は

$$\epsilon^{Ozawa}(x_0) = \langle \phi_0, \xi_0 | \{\hat{X}_t - \hat{x}_0\}^2 | \phi_0, \xi_0 \rangle^{1/2} \quad (10)$$

であり，式 (3) の相互作用の場合には，式 (4) より

$$\epsilon^{Ozawa}(x_0) = 0 \quad (11)$$

である．運動量の擾乱を式 (5) を用いて計算すると

$$\begin{aligned} \eta(p_0) &= \langle \phi_0, \xi_0 | \{\hat{p}_0 + \hat{P}_0\}^2 | \phi_0, \xi_0 \rangle^{1/2} \\ &= \{\sigma^2(p_0) + \sigma^2(P_0) + (\langle \hat{p}_0 \rangle + \langle \hat{P}_0 \rangle)^2\}^{1/2} \end{aligned} \quad (12)$$

である．ここで $\langle \hat{p}_0 \rangle$ と $\langle \hat{P}_0 \rangle$ はそれぞれ相互作用前の対象粒子とプローブの運動量の初期状態での平均である．更に $\sigma(p_0)$ と $\sigma(P_0)$ はそれぞれ相互作用前の対象粒子とプローブの運動量の標準偏差である．式 (12) より，明らかに運動量の擾乱は有限の値をとることができるから，位置測定の相互作用が式 (3) の場合には

$$\epsilon(x_0)\eta(p_0) = 0 \quad (13)$$

となり、不確定性関係 (2) を破っていると小澤は主張した。^{注1)}

3 小澤の新しい不確定性関係式

前章でHeisenbergの不確定性関係 (2) が一般には成立しないことが明らかになったので、小澤は新しい不確定性関係式の導出を試みた。プローブと対象粒子は別の系であり、それらの同じ時刻の演算子は交換するから、 $[\hat{X}_t, \hat{p}_t] = 0$ である。^{注2)}

式 (6) と (9) を上の式に代入し、 $[\hat{x}_0, \hat{p}_0] = i\hbar$ を使うと、

$$|\langle [\hat{N}(x_0), \hat{D}(p_0)] \rangle| + |\langle [\hat{N}(x_0), \hat{p}_0] \rangle| + |\langle [\hat{x}_0, \hat{D}(p_0)] \rangle| \geq \hbar. \quad (14)$$

ここで、 $|\phi_0, \xi_0\rangle$ を \rangle と省略してかいた。さらに

$$\epsilon(x_0)^2 = \langle \hat{N}(x_0)^2 \rangle \geq \langle \hat{N}(x_0)^2 \rangle - \langle \hat{N}(x_0) \rangle^2 \equiv \sigma(N(x_0))^2$$

であるから

$$\epsilon(x_0) \geq \sigma(N(x_0)). \quad (15)$$

同様に

$$\eta(p_0) \geq \sigma(D(p_0)). \quad (16)$$

ここで、任意のオブザーバブル \hat{A} 、 \hat{B} と任意の状態ベクトル $|\rangle$ に対して成立する不等式

$$\sigma(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle| \quad (17)$$

を用いると、

$$\epsilon(x_0)\eta(p_0) \geq \sigma(N(x_0))\sigma(D(p_0)) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{N}(x_0), \hat{D}(p_0)] \rangle|, \quad (18)$$

$$\epsilon(x_0)\sigma(p_0) \geq \sigma(N(x_0))\sigma(p_0) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{N}(x_0), \hat{p}_0] \rangle|, \quad (19)$$

$$\sigma(x_0)\eta(p_0) \geq \sigma(x_0)\sigma(D(p_0)) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{x}_0, \hat{D}(p_0)] \rangle|. \quad (20)$$

式 (18)~(20) を式 (14) に代入して

$$4 \quad \epsilon(x_0)\eta(p_0) + \sigma(x_0)\eta(p_0) + \epsilon(x_0)\sigma(p_0) \geq \hbar/2. \quad (21)$$

これが小澤が導出した新しい不確定性関係である。

4 小澤の測定誤差への批判

本章では、2章で述べたHeisenbergの不確定性関係に対する小澤の批判の妥当性に

ついて考察する。

最初に、位置測定によって生じた対象粒子の運動量の擾乱を評価するのに、小澤は相互作用 (3) を用いているが、これは適切ではない。その理由は、式 (5) から $\hat{p}_t + \hat{P}_t = \hat{p}_0$ となり、明らかにこの相互作用が運動量の保存則を満たしていないからである。運動量を保存する相互作用を用いて、不確定性関係が成立しない場合があることを示すべきである。

2 番目に、この相互作用を用いた位置の測定装置が本当に位置の測定装置といえるか疑問である。式 (4) から、測定したいオブザーバブル \hat{x}_0 が相互作用後のプロープの位置 \hat{X}_t のみの関数になっていて、相互作用前のプロープの位置 \hat{X}_0 に依らないことがわかる。通常の測定装置では、プロープの位置の変化から対象粒子の位置 \hat{x}_0 を測定していると考えられるので、最初にプロープがどこにあったのかに依らずに、相互作用後のプロープの位置 \hat{X}_t のみから対象粒子の位置を測定する装置に対して疑問が残る。

更に、小澤の理論のより深刻な欠陥であると筆者が考えるのは、以下に示すように、小澤の測定誤差の定義が正しくないことである。小澤は対象粒子の測定前の位置 \hat{x}_0 の測定値 $(x_0)_{exp}$ を、相互作用に依らずに常に、相互作用後のプロープの位置の測定値 X としている⁵⁾：

$$(x_0)_{exp}^{Ozawa} = X. \quad (22)$$

相互作用が式 (3) の場合には、式 (4) より、小澤が定義した測定値は正しいことがわかる。しかし、von Neumannが最初に提案し、小澤も詳しく検証している相互作用 $\hat{H} = K\hat{x}_0\hat{P}_0$ ^{7,5,6)} の場合には、

$$\hat{x}_0 = \hat{X}_t - \hat{X}_0 \quad (23)$$

となるので、小澤が定義した測定値 (22) は正しい測定値を与えない。このことは、相互作用前の対象粒子とプロープの標準偏差 $\sigma(x_0)$ と $\sigma(X_0)$ がともに 0 である場合を考えると、より明らかになる。この場合には対象粒子の測定値 $(\hat{x}_0)_{exp}$ は X ではなく、 $X - \langle \hat{X}_0 \rangle$ としなければならない。

もっと一般に

$$\hat{X}_t = \beta_1 \hat{x}_0 + \beta_2 \hat{X}_0, \quad \beta_1 \text{ と } \beta_2 \text{ は実数で } \beta_1 + \beta_2 = 1 \quad (24)$$

の場合には^{注3)},

$$(x_0)_{exp} = (X - \beta_2 \langle \hat{X}_0 \rangle) / \beta_1, \quad \beta_1 \neq 0 \quad (25)$$

としなければならない。小澤のように測定値 $(x_0)_{exp}$ を式 (22) で定義すると、一般には正しい測定値が得られない。ここで $\beta_1 = 0$ のときには \hat{x}_0 が \hat{X}_t と \hat{X}_0 の関数にならないので、プロープの位置の測定結果から相互作用前の対象粒子の位置を予測する

ことはできない。従って $\beta_1 = 0$ である位置の測定装置は存在しないので、 $\beta_1 = 0$ の場合を考える必要はない。

このように小澤の理論では測定値が正しく定義されていないので、小澤が定義したノイズ演算子 (9) も正しくない。相互作用前の対象粒子の位置の測定値に対する正しいノイズ演算子は、式 (25) を用いて

$$\hat{N}(x_0) = \frac{1}{\beta_1}(\hat{X}_t - \beta_2\langle\hat{X}_0\rangle\hat{I}) - \hat{x}_0 \quad (26)$$

$$= \frac{\beta_2}{\beta_1}(\hat{X}_0 - \langle\hat{X}_0\rangle\hat{I}) \quad (27)$$

である。

上で述べた、小澤の定義した測定値が正しくないということに起因しているが、以下に述べるように、小澤の理論にはいくつかの不合理な点が存在する。

A. 式 (8) のようにノイズ演算子を2乗して平均するのは、一般にノイズ演算子の平均をとると0になってしまうからである。しかし、小澤のノイズ演算子の平均は0になっていない。すなわち、小澤の定義した対象粒子の測定値 $(\hat{x}_0)_{exp}$ の平均は、 $\langle\hat{X}_t\rangle = \beta_1\langle\hat{x}_0\rangle + \beta_2\langle\hat{X}_0\rangle$ であるので、一般には測定の対象である粒子の位置の平均値 $\langle\hat{x}_0\rangle$ に一致しない。

B. 対象粒子の状態ベクトル $|\phi_0\rangle$ とプローブの状態ベクトル $|\xi_0\rangle$ が位置の演算子の固有状態であり、その固有値がそれぞれ \bar{x}_0 、 \bar{X}_0 の場合を考える。このときそれぞれの標準偏差 $\sigma(x_0)$ と $\sigma(X_0)$ はともに0である。このとき小澤の理論では、測定値の標準偏差 $\sigma((x_0)_{exp}^{Ozawa})$ が0になるので、 \hat{x}_0 の位置測定を多数回繰り返したときに得られる測定値は常に同じである。しかし、そのときの誤差は $\epsilon(x_0)^{Ozawa} = |\beta_1\bar{x}_0 + \beta_2\bar{X}_0 - \bar{x}_0|$ となり、一般には0とならない。このことは非常に奇妙である。なぜならば、測定対象の位置のゆらぎが0であり、多数回繰り返したときに得られる位置測定の結果が常に同じであるならば、当然のことながら、測定誤差は0であると考えられるからである。しかし小澤の測定誤差は0になっていない。逆に、測定誤差が0でないときには、位置測定の結果は測定誤差程度のゆらぎをもっているはずである。しかし位置測定の結果は常に同じである。

C. Bornの波動関数の確率解釈によれば、対象粒子の位置 \hat{x}_0 を測定したとき、その測定結果が範囲 $\Delta = \{x_0; r - \delta \leq x_0 \leq r + \delta\}$, $\delta > 0$ にある確率は $\int_{\Delta} dx_0 |\phi_0(x_0)|^2$ である。正しい測定理論は、測定誤差0のとき、このことを再現できなければならない。小澤の場合には、 $(x_0)_{exp} = X$ としているので、

$$\int_R dx \int_{\Delta} dX |\langle x, X | \hat{U} | \phi_0, \xi_0 \rangle|^2 = \int_{\Delta} dx_0 |\phi_0(x_0)|^2 \quad (28)$$

でなければならない。ここで R は実数全体を、 $\langle x, X | \hat{U} | \phi_0, \xi_0 \rangle$ は相互作用後の対象粒子とプローブの波動関数を表している。

小澤の測定誤差の2乗は、 \hat{X}_t が式 (24) で与えられているとき、式 (8) と (9)

を用いて,

$$\epsilon^{ozawa}(x_0)^2 = (\beta_1 - 1)^2 \sigma(x_0)^2 + \beta_2^2 \sigma(X_0)^2 + \{(\beta_1 \langle \hat{x}_0 \rangle + \beta_2 \langle \hat{X}_0 \rangle) - \langle \hat{x}_0 \rangle\}^2 \quad (29)$$

である. 従って, $\epsilon^{ozawa}(x_0) = 0$ となるのは, 次の2つの場合である:

① $\beta_1 = 1$ のとき. このとき $\beta_2 = 0$ となり, $\beta_1 \langle \hat{x}_0 \rangle + \beta_2 \langle \hat{X}_0 \rangle = \langle \hat{x}_0 \rangle$ も成立する.

② $\beta_1 \neq 1$ のとき. このとき $\beta_2 \neq 0$ となるので, $\sigma(x_0) = 0$ かつ $\sigma(X_0) = 0$ かつ $\beta_1 \langle \hat{x}_0 \rangle + \beta_2 \langle \hat{X}_0 \rangle = \langle \hat{x}_0 \rangle$ でなければならない.

②の結果も極めて奇妙である. というのは, $\sigma(x_0) = 0$ の場合, すなわち対象粒子の初期状態が位置演算子の固有状態の場合しかBornの確率則を再現しないことを意味しているからである.

これらのことは小澤の誤差の定義が正しくないことを示している.

小澤の誤差の定義の式(8)から, $\epsilon^{Ozawa}(x_0) = 0$ のとき $\hat{X}_t |\phi_0, \xi_0\rangle = \hat{x}_0 |\phi_0, \xi_0\rangle$ である. これより $\langle \phi_0, \xi_0 | \hat{X}_t | \phi_0, \xi_0 \rangle = \langle \phi_0, \xi_0 | \hat{x}_0 | \phi_0, \xi_0 \rangle$, $\sigma(X_t) = \sigma(x_0)$ が簡単に導出できる. このことから, 小澤の誤差は, 対象粒子が最初もっていた位置情報がプローブに転送される際に生じるノイズの程度を表していると考えられる. しかしこのように定義された誤差は対象粒子の位置の測定誤差ではない.

正しい測定値(25)とノイズ演算子(27)を用いたときには, 上で述べたA~Cの不合理な問題は生じないことを以下に示す.

A. 式(25)の正しい測定値 $(x_0)_{exp}$ を用いると, $\langle (\hat{x}_0)_{exp} \rangle = \langle \frac{1}{\beta_1} \hat{X}_t - \frac{\beta_2}{\beta_1} \langle \hat{X}_0 \rangle \hat{I} \rangle$. 式(24)の \hat{X}_t を代入すると $\langle (\hat{x}_0)_{exp} \rangle = \langle \hat{x}_0 \rangle$ となり, 測定値 $(x_0)_{exp}$ の平均は測定対象である粒子の位置 \hat{x}_0 の平均に等しい.

B. \hat{X}_t が式(24)で与えられているときには, 正しい測定値の標準偏差 $\sigma((x_0)_{exp})$ は $(\sigma^2(x_0) + \epsilon^2(x_0))^{1/2}$ となる. また式(27)より測定誤差 $\epsilon(x_0) = |\frac{\beta_2}{\beta_1}| \sigma(X_0)$ となるので, $\sigma(x_0) = \sigma(X_0) = 0$ のときには $\epsilon(x_0) = \sigma((x_0)_{exp}) = 0$ となる. これは, 測定対象の位置のゆらぎ $\sigma(x_0)$ が0のとき, 測定誤差 $\epsilon(x_0) = 0$ で, 多数回繰り返したときに得られる位置の測定値が常に同じであることを意味しているので, 合理的な結果である.

C. 測定値が式(25)で与えられているとき, 測定値が範囲 Δ にあるためには, 相互作用後のプローブの位置の測定値 X は範囲 $\Delta_X = \{X; \beta_1 r + \beta_2 \langle \hat{X}_0 \rangle - |\beta_1| \delta \leq X \leq \beta_1 r + \beta_2 \langle \hat{X}_0 \rangle + |\beta_1| \delta\}$ にある必要がある. 従って, 理論がBornの確率規則を再現するためには, 測定誤差 $\epsilon(x_0) = |\frac{\beta_2}{\beta_1}| \sigma(X_0)$ が0のとき

$$\int_R dx \int_{\Delta_X} dX |\langle x, X | \hat{U} | \phi_0, \xi_0 \rangle|^2 = \int_{\Delta} dx_0 |\phi_0(x_0)|^2$$

でなければならない. $\beta_2 = 0$ と $\sigma(X_0) = 0$ の場合に分けて, 上の式が成立することを示すことができる. 小澤の理論では, $\epsilon(x_0) = 0$ となるための条件として測定対象

の位置の標準偏差 $\sigma(x_0)$ が 0 である必要があったが、いまの場合にはそのような不合理なことは生じていない。

5 EPRの粒子対の位置測定と小澤の不等式

小澤は不確定性関係 (2) が成立しないもう一つの例として、Einstein-Podolsky-Rosen (EPR)⁸⁾ が提起した粒子対についての測定を挙げている。⁶⁾ EPRは「粒子1と粒子2の位置の差」と「粒子1と粒子2の運動量の和」を、同時に正確に知ることができるように設定されている粒子1と2の対を考えた。従ってEPR対においては、粒子2の位置を測定することによって、粒子1の位置を測定することができる。

ここで粒子1と2の測定前の位置をそれぞれ $\hat{q}_1(0)$, $\hat{q}_2(0)$ とし、測定誤差 $\epsilon(q_2) = 0$ で粒子2の位置を測定することを考える。このとき遠く離れている粒子1に対して何も測定操作を与えていないので、粒子1に対する運動量の擾乱 $\eta(p_1)$ は 0 である。^{註4)} このような間接測定の場合にもHeisenbergの不確定性関係 (2) が成立するとすれば、

$$\epsilon(q_1)\eta(p_1) \geq \hbar/2. \quad (30)$$

従って、 $\eta(p_1) \rightarrow 0$ ならば $\epsilon(q_1) \rightarrow \infty$ とならなければならない。しかし、粒子2の位置測定を通して粒子1の位置測定ができたことと、 $\epsilon(q_1) \rightarrow \infty$ となることは矛盾すると石井は指摘している。⁹⁾ その理由を石井は述べていないが、粒子1の位置が正確に測定できたのであるから、その測定誤差 $\epsilon(q_1)$ は 0 になると考えているからと思われる。

しかし小澤の不等式が正しければ^{註5)}、 $\eta(p_1) = 0$ のとき、

$$\epsilon(q_1)\sigma(p_1) \geq \hbar/2 \quad (31)$$

となるので、 $\eta(p_1) = 0$ のときに $\epsilon(q_1) \rightarrow \infty$ とする必要がないと石井は指摘している。

細谷も、粒子2の位置測定の結果から粒子1の位置が確定するから、 $\epsilon(q_1) = 0$ と考えている。¹⁰⁾ $\epsilon(q_1) = 0$ かつ $\eta(p_1) = 0$ の場合にはHeisenbergの不確定性関係 (2) は成立しないが、これを小澤の不等式 (21) に代入すると、

$$\sigma(q_1)\eta(p_1) \geq \hbar/2 \quad (32)$$

8

が成立するので、 $\sigma(q_1) \rightarrow \infty$ になっていれば矛盾が生じない。細谷はこの例を $\sigma(q_1)$ が 0 でないにもかかわらず測定誤差 $\epsilon(q_1)$ が 0 の例を与えていて、おもしろいといっている。

このように、小澤の理論を正しいと考えている石井も細谷も、粒子2の位置測定の結果から粒子1の位置が正確に測定できるのであるから、 $\epsilon(q_1) = 0$ が成立すると考えているが、次に示すように、小澤の測定誤差の定義を用いると $\epsilon(q_1)$ は 0 ではない。

粒子2の位置測定を誤差0でおこなったとすると、小澤の誤差の2乗は

$$\epsilon^{Ozawa}(q_2)^2 = \langle \phi_0, \xi_0 | \{\hat{M}_t - \hat{q}_2(0)\}^2 | \phi_0, \xi_0 \rangle = 0 \quad (33)$$

である。ここで $|\phi_0\rangle$ と $|\xi_0\rangle$ はそれぞれ、相互作用前の対象粒子対とプローブの状態ベクトルである。また \hat{M}_t は相互作用後のプローブのメーター・オブザーバブルである。(実際には注2で述べたように、 $\hat{M}_t = \hat{X}_t$ である。) 式 (33) より

$$\{\hat{M}_t - \hat{q}_2(0)\} | \phi_0, \xi_0 \rangle = 0. \quad (34)$$

EPR対では粒子1と2の距離を d としているので、 $\hat{M}_t - \hat{q}_1(0) = \hat{M}_t - \hat{q}_2(0) + \{\hat{q}_2(0) - \hat{q}_1(0)\}$ より

$$\{\hat{M}_t - \hat{q}_1(0)\} | \phi_0, \xi_0 \rangle = \{\hat{q}_2(0) - \hat{q}_1(0)\} | \phi_0, \xi_0 \rangle = d | \phi_0, \xi_0 \rangle. \quad (35)$$

これより、粒子1に対する小澤の測定誤差は $\epsilon^{Ozawa}(q_1) = d$ となり、0にはならない。

小澤は、任意の小さい $\alpha > 0$ を用いて、 $\langle \phi_0 | \{\hat{q}_2(0) - \hat{q}_1(0)\}^2 | \phi_0 \rangle < \alpha^2$ となるように $|\phi_0\rangle$ を選ぶことができるので、このような $|\phi_0\rangle$ に対しては、粒子1の位置を $\epsilon(q_1) < \alpha$ で、同時に粒子1の運動量の擾乱 $\eta(p_1)$ を0で測定することができるかと主張している。⁶⁾つまり、いくらでも小さい誤差で粒子1の位置を測定できると述べているが、上で導出したように、小澤の誤差では $\epsilon(q_2) = 0$ のとき $\epsilon(q_2) = d$ であるので、EPRが仮定したように d が非常に大きい値のときには、粒子1の測定誤差が非常に小さいと主張することはできない。小澤は $|\phi_0\rangle$ のユニタリ変換を考え、条件 $\epsilon(q_1) < \alpha$ を満たす多くのユニタリ変換があると主張しているが、 $|\phi_0\rangle$ は対象粒子対の初期状態であり、EPRの問題を考えている以上、 $|\phi_0\rangle$ を勝手に変換することはできない。また $|\phi_0\rangle$ を変換して $\epsilon(q_1) \rightarrow 0$ となるようにしても、そのときには $\epsilon(q_2) = 0$ は成立しなくなってしまうであろう。残された方法は d が非常に小さいと考えることであるが、そのときには、粒子2の位置測定によって粒子1の運動量の擾乱がないという仮定が、そもそも疑わしくなる。粒子2の位置測定によって粒子1の運動量が影響を受けないと考えることができるのは、 d が大きい場合、正確には d が粒子2とプローブとの相互作用のレンジより非常に大きい場合のみである。

このように、粒子2の位置測定の結果から粒子1の位置を正確に測定できたならば、常識的には細谷や石井が考えたように粒子1の位置測定の誤差は0であるが、小澤の測定誤差の定義では、粒子2の位置測定の誤差 $\epsilon(q_2)$ が0のとき、粒子1の位置測定の誤差 $\epsilon(q_1)$ は d となり0ではない。このことは小澤の測定誤差の定義が正しくないこと示していると筆者は考える。

6 まとめと考察

本論文において、測定過程に関連したHeisenbergの不確定性原理に対する小澤の批

判を紹介し、それについて詳細に吟味した。小澤は不確定性関係が成立しない例として、ある一つの対象粒子とプローブの相互作用を考え、その相互作用を用いた場合には不確定性関係が成立しないことを示した。

小澤の用いた相互作用は相互作用の前後で運動量が保存していないこと、及びその相互作用を用いた場合には、測定したいオブザーバブル \hat{x}_0 が相互作用後のプローブの位置オペレーター \hat{X}_t のみの関数になっていて、相互作用前のプローブの位置オペレーター \hat{X}_0 に依存していないことから、この相互作用を用いた測定装置が実際には位置の測定装置になっていない可能性を指摘した。

更に、小澤が測定誤差を定義する際に用いた理論上の測定値が正しくないことを指摘した。このことから、小澤の理論には次に示すようないくつかの不合理な点が生じている。

A. 測定値 $(x_0)_{exp}$ の平均が測定対象である粒子の位置の平均 $\langle \hat{x}_0 \rangle$ に一致しない。

B. 対象粒子の位置のゆらぎが0のとき、小澤の理論では測定誤差が0でないにもかかわらず、多数回繰り返したときに得られる位置の測定値が常に同じになっている場合がある。測定誤差が0でない場合には、多数回繰り返したときに得られる位置の測定値には、その測定誤差程度のゆらぎが存在すると考えられるので、小澤の理論のこの結果は受け入れがたい。

C. 正しい測定理論は測定誤差が0のときBornの確率規則を再現できなければならない。小澤の理論では、測定誤差が0になるためには対象粒子の初期状態の位置のゆらぎ $\sigma(x_0)$ が0でなければならないという条件が必要になる場合がある。このことは対象粒子が特殊な状態 ($\sigma(x_0) = 0$) の場合にしか、Bornの規則を満足しないということの意味しているので、正しい理論とは言えない。

このように小澤のHeisenbergの不確定性原理に対する批判には、いくつかの問題点があるので、Heisenbergの不確定性関係が成立しない場合があるという小澤の主張は説得力がないと筆者は考える。^{注6)}

本論文で示した正しい測定値 (25) とノイズ演算子 (26) を用いれば、上で述べた不合理な点は生じないことを明らかにした。

EPRの粒子対に対する位置測定についても考察した。小澤の定義した位置測定の誤差を用いると、粒子2の位置を誤差0で測定したとすると、粒子1の位置測定の誤差 $\epsilon(q_1)$ は d となる。ここで d は粒子1と2の距離である。この場合には粒子1の位置を正確に測定できるので、小澤理論の支持者である細谷や石井も、当然のように、 $\epsilon(q_1) = 0$ と考えているが、小澤の理論では $\epsilon(q_1) = d$ である。小澤も $\epsilon(q_1) \rightarrow 0$ とできるという議論を展開しているが、小澤の理論では、明らかに $\epsilon(q_2) = 0$ のとき $\epsilon(q_1) = d$ であり0とはならない。このような不合理なことが生じた原因は、明らかに小澤が定義した測定値が正しくないからである。

本文では述べなかったが、小澤の不等式に関して明らかになっていることの結論だけを述べる。

A. 直接測定の場合に、正しい測定誤差を用いると、小澤の不等式は式 (21) ではなく、次のように修正されなければならない：

$$\epsilon(x_0)\eta(p_0) + \sigma(x_0)\eta(p_0) \geq \hbar/2. \quad (36)$$

B. EPRの粒子対に対する位置測定の場合のように、粒子2の位置測定の結果を用いて粒子1の位置測定をおこなうような間接測定の場合には、正しい測定誤差を用いると小澤の不等式が成立していないことがわかる。小澤の測定誤差を用いた場合には、間接測定の場合にも式 (21) の不等式が成立するので、小澤、細谷、そして石井は間接測定の場合にも小澤の不等式が成立するとみなして議論をしている。しかし、間接測定の場合には小澤の不等式が、そもそも成立していない。

本論文の一部は、現在欧文誌に投稿中である論文の一部と重複していることを、お断りしておきます。

注

- 1) ここで小澤は $\epsilon(x_0)$ を相互作用前の粒子の位置 \hat{x}_0 の測定誤差と考えていることがわかる。しかし、位置 \hat{x}_0 の測定値の不確定さは測定誤差 $\epsilon(x_0)$ ではないと筆者は考えている。本論文では、小澤の主張に沿って議論している。
- 2) 小澤はこの式において、プローブの位置演算子 \hat{X}_t ではなく、もう少し一般的なプローブのオブザーバブル \hat{M}_t を用いて議論を進めている。しかしノイズ演算子を式 (9) で定義しているので、 $\hat{M}_t = \hat{X}_t$ である。
- 3) 相互作用の前で運動量が保存するという条件より、 $\beta_1 + \beta_2 = 1$ が導出される。 \hat{X}_t が式 (24) で与えられる場合があることは明らかである。しかし、相互作用後のプローブの位置 \hat{X}_t の測定値から、対象粒子の位置 \hat{x}_0 を測定する装置の場合には、2体系のハミルトニアンが \hat{x}_0 , \hat{p}_0 , \hat{X}_0 と \hat{P}_0 の関数であるという条件のもとで、 \hat{X}_t が式 (24) で与えられることを証明することができる。
- 4) EPRもそのように考え、小澤もそのことを受けて粒子1に対する運動量の擾乱を0と考えて議論しているが、実際には擾乱を0と考えることはできない。
- 5) 間接測定の場合にも、小澤の測定誤差を用いた場合には小澤の不等式 (21) が成立することを簡単に証明することができる。
- 6) ただし筆者の計算でも、小澤が解釈した意味でのHeisenbergの不確定性関係は破れている。筆者はここで小澤の結論が間違っていると主張しているわけではない。小澤の理論には正しくない箇所があるので、結論の導出過程に問題がある。

参考文献

- 1) W. Heisenberg, "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik", Zeitschrift für Physik 43, 1927, p.172-198.
- 2) 湯川秀樹, 井上健編『現代の科学Ⅱ/量子論的な運動学と力学の直観的内容について』中央公論社, 1974, p.325-358.

- 3) V.B. Braginsky, F.Ya. Khalili, "Quantum Measurement", Cambridge University Press, 1992, p.10.
- 4) 小杉誠司「小澤の不等式の光子箱の思考実験への適用」『淑徳短期大学紀要』第46号, 2007, p.145-156.
- 5) Masanao Ozawa, "Position measuring interactions and the Heisenberg uncertainty principle", Phys. Lett. A299, 2002, p.1-7.
- 6) Masanao Ozawa, "Physical content of Heisenberg's uncertainty relation: limitation and reformulation", Phys. Lett. A318, 2003, p.21-29.
- 7) J. von Neumann, "Mathematical Foundations of Quantum Mechanics", Princeton University Press, 1955.
- 8) A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?" Phys. Rev. 47, 1935, p.777-780.
- 9) 石井茂『ハイゼンベルグの顕微鏡／不確定性原理は超えられるか』日経B P社, 2006, p.255.
- 10) 細谷暁夫「量子力学をめぐるアインシュタインとボーアの論争」『数理科学』No.484, 2003, p.46-51.