

位置の測定装置における時間発展演算子

小 杉 誠 司

(2009年 9 月21日受理)

要 約

①測定装置においては測定結果は一意的でなければならない．②対象粒子とプローブの相互作用は運動量と角運動量を保存しなければならない．

相互作用後の粒子とプローブの位置演算子 \hat{x}_t 、 \hat{X}_t が相互作用前の演算子 \hat{x}_0 、 \hat{X}_0 の関数で与えられるとき、①と②の条件がそれらの関数形をどのように限定するか考察した．本論文の結果は、すべての粒子の位置 \hat{x}_0 に対して、その測定値の平均が \hat{x}_0 の平均に等しいという条件を課すことによって、線形性の仮説を証明できることを示唆している．

キーワード 測定の理論、位置測定、運動量の保存則、角運動量の保存則、測定値の平均

1 はじめに

前論文¹⁾で位置と運動量の不確定性関係の問題を考察した際に、次のような1次元の位置測定のモデルを提示した：

対象粒子が測定装置の一部であるプローブ (probe) と時刻 0 で相互作用を始め、時刻 t に相互作用を終える．相互作用を終えた直後にプローブの位置を別の測定装置によって測定し、その測定値から対象粒子の位置の測定結果を予測する．その際プローブの位置の測定は誤差 0 でおこなうことができること、またその測定が粒子の運動量を擾乱することがないと仮定されている．

このモデルで重要なことは、対象粒子とプローブの相互作用をどのように記述するかという問題である．von Neumann は有名な観測理論²⁾ のなかで、次のような方法で測定後の粒子とプローブの位置演算子を求めている：

- ①相互作用を選びハミルトニアンを作成する．
- ②ハミルトニアン \hat{H} は粒子とプローブの運動エネルギーと相互作用 \hat{V} の和

$$\hat{H} = \hat{h}_0 + \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (1)$$

で与えられるが, $\hat{h}_0 + \hat{H}_0 \approx 0$ として, $\hat{H} \approx \hat{V}$ でハミルトニアンを近似する.

③ハミルトニアン \hat{H} を用いて, 時間発展演算子 $\hat{U} = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\}$ を求める.

④相互作用後の粒子の位置演算子を $\hat{x}_t = \hat{U}^{-1}\hat{x}_0\hat{U}$ より計算する. ここで \hat{x}_0 は相互作用前の粒子の位置演算子である.

例えば von Neumann は $\hat{V} = K\hat{x}_0\hat{P}_0$ (K は定数) という相互作用を考えたが, このとき

$$\hat{x}_t = \hat{x}_0, \quad \hat{X}_t = \hat{x}_0 + \hat{X}_0 \quad (2)$$

となる. ここで \hat{P}_0 は相互作用前のプローブの運動量演算子, \hat{x}_0 , \hat{X}_0 は相互作用前の対象粒子とプローブの位置演算子である. ここで $Kt=1$ としている. Ozawa^{3),4)} はもう少し複雑な相互作用を考えた. von Neumann と同じ方法を使って, その相互作用の場合には

$$\hat{x}_t = \hat{x}_0 - \hat{X}_0, \quad \hat{X}_t = \hat{x}_0 \quad (3)$$

を得た.

上で述べた方法の欠点は, ②で $\hat{h}_0 + \hat{H}_0 \approx 0$ と仮定して, 粒子とプローブの運動エネルギーを無視する近似をしていることである. この近似の妥当性は吟味されていない.

筆者は前論文で von Neumann や Ozawa の結果 (2), (3) から

$$\hat{x}_t = \alpha_1\hat{x}_0 + \alpha_2\hat{X}_0, \quad \hat{X}_t = \beta_1\hat{x}_0 + \beta_2\hat{X}_0 \quad (4)$$

と仮定し, この場合について \hat{x}_0 の正しい測定値 $(x_0)_{exp}$ を具体的に定義した. ここでパラメータ α_1 , α_2 , β_1 , β_2 は実数である. これらのパラメータの値は粒子とプローブの相互作用によって決まり, 相互作用前の粒子とプローブの状態にはよらない. 相互作用の前後で粒子とプローブの運動量の和は保存されなければならないが, このときには

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1 \quad (5)$$

が成立する.

前論文¹⁾ では述べていないが, 式 (4) の線形性の仮説を用いると, すべての計算を簡単におこなうことができ, しかも, そこから導出された結論は物理的に考えて合理的で満足のいくものであった.

筆者は線形性の仮説 (4) が, 位置の測定装置の相互作用の場合には, すべての相互作用で成立すると考えている. 本論文でこのことを示したいと考えている.

測定装置の条件として最も重要なことは, 測定結果の一意性である. ここで考察する装置では, 相互作用後のプローブの位置の測定結果から対象粒子の位置を予測する

のであるが、予測値が2つ以上ある相互作用を粒子とプローブの相互作用として使うことはできない。次に粒子とプローブの相互作用は運動量や角運動量などの保存則を満たさなければならない。最後に、例えば \hat{x}_0 の測定の場合、測定値の平均は測定対象である \hat{x}_0 の平均に等しくなければならない。対象粒子の状態を測定前に想定することはできないから、任意の粒子の初期状態に対して上のことが成立しなければならない。これらの条件から線形性の仮説が正当化されると予想している。

2 測定装置の条件

測定前にプローブの位置を測定しておき、測定後のプローブの位置の測定値から対象粒子の位置を測定する装置を考える。このとき対象粒子とプローブからなるシステムの測定前の状態を $|x_0\rangle \otimes |X_0\rangle$ とすると、測定後のシステムの状態は

$$\hat{U}|x_0, X_0\rangle = |f(x_0, X_0), g(x_0, X_0)\rangle \quad (6)$$

とならなければならない。ここで $f(x_0, X_0)$, $g(x_0, X_0)$ は任意の関数、 \hat{U} はシステムの時間発展演算子であり、テンソル積 $|x_0\rangle \otimes |X_0\rangle$ を $|x_0, X_0\rangle$ と簡略してかいた。また $|x_0\rangle$ と $|X_0\rangle$ はそれぞれ測定前の対象粒子とプローブの位置演算子 \hat{x}_0 と \hat{X}_0 の固有ベクトルである。式(6)の右辺は一般には状態ベクトルの重ね合わせになるが、以下に説明するように、 \hat{U} が測定装置と対象粒子の時間発展演算子であるという条件により、右辺は1項のみでなければならない。

もし測定後の状態が次のような2項の和になると仮定する：

$$\begin{aligned} \hat{U}|x_0\rangle \otimes |X_0\rangle &= c_1|f_1(x_0, X_0), g_1(x_0, X_0)\rangle + c_2|f_2(x_0, X_0), g_2(x_0, X_0)\rangle, \\ g_1(x_0, X_0) &\neq g_2(x_0, X_0). \end{aligned}$$

このときプローブの測定後の位置の測定値 X を用いて、 $X = g_1(x_0, X_0)$ から得られる x_0 と、 $X = g_2(x_0, X_0)$ から得られる x_0 の、二つの x_0 が得られ、 x_0 の値は一意的に決まらない。明らかに、このような相互作用をする装置は測定装置として不適格である。同じ理由により、関数 $g(x_0, X_0)$ の値と x_0 の値が1対1に対応していなければならない。

式(6)の関数 $f(x_0, X_0)$ と $g(x_0, X_0)$ を

$$x_t = f(x_0, X_0), \quad X_t = g(x_0, X_0) \quad (7)$$

とすると、

$$\hat{x}_t \equiv \hat{U}^{-1}\hat{x}_0\hat{U} = f(\hat{x}_0, \hat{X}_0), \quad \hat{X}_t \equiv \hat{U}^{-1}\hat{X}_0\hat{U} = g(\hat{x}_0, \hat{X}_0) \quad (8)$$

が成立することが容易にわかる。

式(8)を見ればわかるように、式(6)で関数 $f(x_0, X_0)$ と $g(x_0, X_0)$ がわかれば、

相互作用後の粒子とプローブの位置をもとめることができる．また任意の $|x_0\rangle$ と $|X_0\rangle$ に対して式 (6) が成立すると考えれば，ヒルベルト空間の任意の状態ベクトルに対して \hat{U} の作用をもとめることができるから，式 (6) はハミルトニアンを使わずに直接時間発展演算子 \hat{U} を定義していると考えることができる．従ってこの方法は，前章で述べた粒子とプローブの運動エネルギーを無視する近似とは無関係である．

3 空間の一様性という条件

よく知られているように，空間の一様性（座標軸の原点をどこにとってもよい）という対称性から，運動量の保存則が得られる．逆に運動量は保存しているから，式 (8) は空間の一様性という対称性を満足しなければならない．このことは式 (8) の関数形に制限を与える．

座標系を x 軸に沿って正の方向に δx 移動する変換を考える．変換前の粒子の位置演算子を \hat{x}_0 , \hat{y}_0 , \hat{z}_0 とすると，変換後の粒子の位置演算子 \hat{x}'_0 , \hat{y}'_0 , \hat{z}'_0 はそれぞれ $\hat{x}'_0 = \hat{x}_0 - \delta x \hat{I}$, $\hat{y}'_0 = \hat{y}_0$, $\hat{z}'_0 = \hat{z}_0$ である．この座標系の変換を表す演算子を \hat{T}_x とすると， $\hat{x}'_0 = \hat{T}_x \hat{x}_0 \hat{T}_x^{-1}$ であり，よく知られているように⁵⁾，

$$\hat{T}_x = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{P}_x \delta x\right\}. \quad (9)$$

ここで \hat{P}_x は系の全運動量の x 成分である．

相互作用の前後で全運動量が保存するので，

$$[\hat{T}_x, \hat{U}] = 0. \quad (10)$$

従って， \hat{T}_x^{-1} と \hat{U} ， \hat{T}_x^{-1} と \hat{U}^{-1} ，そして \hat{T}_x と \hat{U}^{-1} も可換である．

式 (8) では空間 1 次元の問題として考えていたが，ここでは 3 次元空間を考えているので，相互作用後の粒子の位置は

$$\hat{x}_t = f_x(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0, \hat{X}_0, \hat{Y}_0, \hat{Z}_0), \quad (11)$$

$$\hat{y}_t = f_y(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0, \hat{X}_0, \hat{Y}_0, \hat{Z}_0), \quad (12)$$

$$\hat{z}_t = f_z(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0, \hat{X}_0, \hat{Y}_0, \hat{Z}_0) \quad (13)$$

となる．

式 (11) に左から \hat{T}_x ，右から \hat{T}_x^{-1} をかけると

$$\hat{x}_t - \delta x \hat{I} = f_x(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0, \hat{X}_0, \hat{Y}_0, \hat{Z}_0) - \delta x \left(\frac{\partial f_x}{\partial \hat{x}_0} + \frac{\partial f_x}{\partial \hat{X}_0} \right).$$

ここで本論文で考えている関数はすべてテーラー展開可能と仮定し

$$\hat{T}_x f_x(\hat{x}) \hat{T}_x^{-1} = f_x(\hat{T}_x \hat{x} \hat{T}_x^{-1})$$

とした．任意の δx に対して上の式が成立しなければならないから

$$\frac{\partial f_x}{\partial \hat{x}_0} + \frac{\partial f_x}{\partial \hat{X}_0} = \hat{I}. \quad (14)$$

同様に式 (12) と (13) に左から \hat{T}_x ，右から \hat{T}_x^{-1} をかけて，

$$\frac{\partial f_x}{\partial \hat{y}_0} + \frac{\partial f_x}{\partial \hat{Y}_0} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial \hat{z}_0} + \frac{\partial f_x}{\partial \hat{Z}_0} = 0 \quad (16)$$

を得る．

偏微分方程式 (15) の一般解は， $h(x)$ を任意の関数として $f_x = h(\hat{y}_0 - \hat{Y}_0)$ である⁶⁾．このことより偏微分方程式 (14) の一般解は， $f_x = \hat{X}_0 + h(\hat{x}_0 - \hat{X}_0)$ であることがわかる．従って偏微分方程式 (14) ～ (16) の一般解は， $F_x(x, y, z)$ を任意の関数として

$$f_x(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0, \hat{X}_0, \hat{Y}_0, \hat{Z}_0) = \hat{X}_0 + F_x(\hat{x}_0 - \hat{X}_0, \hat{y}_0 - \hat{Y}_0, \hat{z}_0 - \hat{Z}_0) \quad (17)$$

である．

同様に，座標系を y 軸に沿って正の方向に δy 移動する変換と， z 軸に沿って正の方向に δz 移動する変換を考えることによって，

$$f_y(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0, \hat{X}_0, \hat{Y}_0, \hat{Z}_0) = \hat{Y}_0 + F_y(\hat{x}_0 - \hat{X}_0, \hat{y}_0 - \hat{Y}_0, \hat{z}_0 - \hat{Z}_0), \quad (18)$$

$$f_z(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0, \hat{X}_0, \hat{Y}_0, \hat{Z}_0) = \hat{Z}_0 + F_z(\hat{x}_0 - \hat{X}_0, \hat{y}_0 - \hat{Y}_0, \hat{z}_0 - \hat{Z}_0) \quad (19)$$

を得る．ここで $F_y(x, y, z)$ と $F_z(x, y, z)$ は任意の関数である．

4 空間の等方性という条件

空間の一様性と同様に，空間の等方性（座標系の向きをどのようにとってもよい）という対称性から角運動量の保存則が得られる．空間の等方性は式 (11) ～ (13) の関数形に制限を与えるはずである．

座標系を z 軸のまわりに $\delta\theta$ 回転する変換を考える．回転後の粒子の位置演算子 \hat{x}' ， \hat{y}' ， \hat{z}' は

$$\hat{x}' = \hat{x} + \delta\theta\hat{y}, \quad \hat{y}' = \hat{y} - \delta\theta\hat{x}, \quad \hat{z}' = \hat{z} \quad (20)$$

である．ここで \hat{x} ， \hat{y} ， \hat{z} は回転前の位置演算子である．

z 軸のまわりの回転を表す演算子を \hat{R}_z とすると， $\hat{x}' = \hat{R}_z \hat{x} \hat{R}_z^{-1}$ である．よく知られているように⁷⁾，

$$\hat{R}_z = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{L}_z \delta\theta\right\}. \quad (21)$$

ここで \hat{L}_z は系の全角運動量の z 成分である．本論文では粒子のスピンは考えていない．

相互作用の前後で全角運動量が保存するので,

$$[\hat{R}_z, \hat{U}] = 0. \quad (22)$$

従って, \hat{R}_z^{-1} と \hat{U} , \hat{R}_z^{-1} と \hat{U}^{-1} , そして \hat{R}_z と \hat{U}^{-1} も可換である. 式 (11) の左から \hat{R}_z , 右から \hat{R}_z^{-1} をかけると

$$f_x + f_y \delta\theta = f_x + \frac{\partial f_x}{\partial \hat{x}_0} \delta\theta \hat{y}_0 + \frac{\partial f_x}{\partial \hat{y}_0} (-\delta\theta \hat{x}_0) + \frac{\partial f_x}{\partial \hat{X}_0} \delta\theta \hat{Y}_0 + \frac{\partial f_x}{\partial \hat{Y}_0} (-\delta\theta \hat{X}_0).$$

任意の $\delta\theta$ に対して上の式が成立しなければならないから

$$f_y = \hat{y}_0 \frac{\partial f_x}{\partial \hat{x}_0} - \hat{x}_0 \frac{\partial f_x}{\partial \hat{y}_0} + \hat{Y}_0 \frac{\partial f_x}{\partial \hat{X}_0} - \hat{X}_0 \frac{\partial f_x}{\partial \hat{Y}_0}. \quad (23)$$

同様にして, 式 (12) と (13) から

$$f_x = -\hat{y}_0 \frac{\partial f_y}{\partial \hat{x}_0} + \hat{x}_0 \frac{\partial f_y}{\partial \hat{y}_0} - \hat{Y}_0 \frac{\partial f_y}{\partial \hat{X}_0} + \hat{X}_0 \frac{\partial f_y}{\partial \hat{Y}_0}, \quad (24)$$

$$0 = \hat{y}_0 \frac{\partial f_z}{\partial \hat{x}_0} - \hat{x}_0 \frac{\partial f_z}{\partial \hat{y}_0} + \hat{Y}_0 \frac{\partial f_z}{\partial \hat{X}_0} - \hat{X}_0 \frac{\partial f_z}{\partial \hat{Y}_0}. \quad (25)$$

ここで式 (17) と (18) を (24) に代入して, $x = x_0 - X_0$, $y = y_0 - Y_0$, $z = z_0 - Z_0$ と置くと,

$$F_x(x, y, z) = x \frac{\partial F_y}{\partial y} - y \frac{\partial F_x}{\partial x}. \quad (26)$$

ここで演算子を示す記号 $\hat{}$ を省略した. 同様に式 (17) と (18) を (23), 式 (19) を (25) に代入して,

$$F_y(x, y, z) = y \frac{\partial F_x}{\partial x} - x \frac{\partial F_y}{\partial y}, \quad (27)$$

$$0 = x \frac{\partial F_z}{\partial y} - y \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad (28)$$

を得る.

同様にして, 座標系を y 軸のまわりに $\delta\theta$ 回転する変換と, x 軸のまわりに $\delta\theta$ 回転する変換を考えることによって,

$$F_x(x, y, z) = x \frac{\partial F_z}{\partial z} - z \frac{\partial F_x}{\partial x}, \quad (29)$$

$$0 = z \frac{\partial F_y}{\partial x} - x \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad (30)$$

$$F_z(x, y, z) = z \frac{\partial F_x}{\partial x} - x \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (31)$$

と

$$0 = y \frac{\partial F_x}{\partial z} - z \frac{\partial F_x}{\partial y}, \quad (32)$$

$$F_y(x, y, z) = y \frac{\partial F_z}{\partial z} - z \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad (33)$$

$$F_z(x, y, z) = z \frac{\partial F_y}{\partial y} - y \frac{\partial F_y}{\partial z} \quad (34)$$

を得る.

5 偏微分方程式の解

偏微分方程式 (32) の一般解は $h(x)$ を任意の関数として, $F_x(x, y, z) = h(y^2 + z^2)$ である⁸⁾. ここで x を定数とみなしている. 同様に, 偏微分方程式 (30) の一般解は $i(x)$ を任意の関数として, $F_y(x, y, z) = i(z^2 + x^2)$ である. ここでは y は定数とみなしている. 空間の対称性と偏微分方程式 (26) ~ (34) から $F_x(x, y, z)$ において, x と y を入れ替えたものが $F_y(x, y, z)$ になると予想される. 従って $p(x)$ を任意の関数として,

$$F_x(x, y, z) = p(x)h(x^2 + y^2 + z^2), \quad F_y(x, y, z) = p(y)h(x^2 + y^2 + z^2)$$

と置き, 式 (26) に代入すると

$$p(x) = xp'(y)$$

を得る. これを解いて $p(x) = cx$ (c は定数) を得る. 従って, 定数 c は任意の関数 $h(x)$ に含めて,

$$F_x(x, y, z) = xh(x^2 + y^2 + z^2).$$

従って, 先程述べた対称性から

$$F_y(x, y, z) = yh(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$F_z(x, y, z) = zh(x^2 + y^2 + z^2).$$

従って相互作用後の粒子の位置は

$$x_t = X_0 + (x_0 - X_0)h((x_0 - X_0)^2 + (y_0 - Y_0)^2 + (z_0 - Z_0)^2), \quad (35)$$

$$y_t = Y_0 + (y_0 - Y_0)h((x_0 - X_0)^2 + (y_0 - Y_0)^2 + (z_0 - Z_0)^2), \quad (36)$$

$$z_t = Z_0 + (z_0 - Z_0)h((x_0 - X_0)^2 + (y_0 - Y_0)^2 + (z_0 - Z_0)^2) \quad (37)$$

となる. 同様にして, 相互作用後のプローブの位置は, $i(x)$ を任意の関数として

$$X_t = X_0 + (x_0 - X_0)i((x_0 - X_0)^2 + (y_0 - Y_0)^2 + (z_0 - Z_0)^2), \quad (38)$$

$$Y_t = Y_0 + (y_0 - Y_0)i((x_0 - X_0)^2 + (y_0 - Y_0)^2 + (z_0 - Z_0)^2), \quad (39)$$

$$Z_t = Z_0 + (z_0 - Z_0)i((x_0 - X_0)^2 + (y_0 - Y_0)^2 + (z_0 - Z_0)^2) \quad (40)$$

となる.

6 3 次の項の効果

再び1次元の問題に戻り, x 軸上の粒子とプローブの相互作用を考えると, 式 (35) と (38) より

$$x_t = X_0 + (x_0 - X_0)h((x_0 - X_0)^2), \quad (41)$$

$$X_t = X_0 + (x_0 - X_0)i((x_0 - X_0)^2) \quad (42)$$

となる. 任意の関数 $h(x)$, $i(x)$ がそれぞれ定数 α_1 , β_1 のとき

$$x_t = X_0 + \alpha_1(x_0 - X_0), \quad (43)$$

$$X_t = X_0 + \beta_1(x_0 - X_0) \quad (44)$$

となるが, これは線形性の仮説の式 (4), (5) と一致する.

ここで粒子の初期状態が $|x_0\rangle$ の場合を考える. プローブの位置 X_0 には標準偏差 $\sigma(X_0)$ 程度のゆらぎがあるので, プローブの波動関数 $\xi(X_0)$ のどの位置成分と粒子が相互作用したのかわからない. 従って上の式 (43), (44) で, X_t に相互作用後のプローブの位置の測定値を, X_0 にその平均値 $\langle X_0 \rangle = \int X_0 |\xi(X_0)|^2 dX_0$ を用いて得られる x_0 , x_t の値を, それぞれの値の測定値 $(x_0)_{exp}$, $(x_t)_{exp}$ と定義する:

$$(x_t)_{exp} = \langle X_0 \rangle + \alpha_1((x_0)_{exp} - \langle X_0 \rangle), \quad (45)$$

$$X_t = \langle X_0 \rangle + \beta_1((x_0)_{exp} - \langle X_0 \rangle). \quad (46)$$

こうして

$$(x_0)_{exp} = x_0 + (1/\beta_1 - 1)(X_0 - \langle X_0 \rangle), \quad (47)$$

$$(x_t)_{exp} = x_t + (\alpha_1/\beta_1 - 1)(X_0 - \langle X_0 \rangle) \quad (48)$$

を得るので, 線形性の仮説より

$$\langle (x_0)_{exp} \rangle = x_0, \quad \langle (x_t)_{exp} \rangle = \langle x_t \rangle \quad (49)$$

が成立することがわかる. これは測定値 $(x_0)_{exp}((x_t)_{exp})$ の平均が測定対象である $x_0(x_t)$ の平均に等しいという合理的な結果を示している. (今の場合, 粒子の初期状態を $|x_0\rangle$ と仮定したので, x_0 の平均は x_0 である.) 一般に測定値に誤差がある場合には測定値はゆらぐが, その平均値は測定対象である真の値に一致すると考えられて

いる．筆者は線形性の仮説(4)が正しいと考えて，時間発展演算子 \hat{U} が粒子とプロ
 ープの運動量の和や角運動量の和を保存しなければならないという条件が，式(7)
 の関数 $f(x_0, X_0)$ ， $g(x_0, X_0)$ の形を決定して，線形性の仮説(4)を導出すると予測
 した．しかし得られた結果(41)，(42)はもう少し一般的なものであり，そのなかの
 特別な場合が線形性の仮説(4)になっている．

式(42)より， $(x_0 - X_0)$ の1次の項の次は，3次の項 $(x_0 - X_0)^3$ であるから，

$$X_t = X_0 + \beta_1(x_0 - X_0) + \beta_3(x_0 - X_0)^3, \quad \beta_3 \neq 0 \quad (50)$$

と仮定して，本章では3次の項の効果について考察する．

3次方程式の解は一般的に知られている．それによると式(50)の解は

$$x_0 - X_0 = B(X_0)^{1/3} - \frac{\beta_1}{3\beta_3} B(X_0)^{-1/3}, \quad (51)$$

$$B(X_0) = \frac{1}{2} \left(-\frac{X_0 - X_t}{\beta_3} + \sqrt{\left(\frac{X_0 - X_t}{\beta_3} \right)^2 + 4 \left(\frac{\beta_1}{3\beta_3} \right)^3} \right) \quad (52)$$

である．式(52)で負の数の平方根が現れる場合には，3次方程式(50)は3つの異な
 る実数解を持ち， X_t と x_0 は1対1に対応しなくなってしまうので， X_t の測定値か
 ら x_0 の値を一意的に決定できない．このような場合は位置の測定装置における X_t と
 x_0 の関係として不適格であるので，そうならないようにパラメータ β_1 ， β_3 を選ぶ
 必要がある．

$\beta_1 = 1$ ， $\beta_3 = 1$ ， $X_0 = 1$ としたときの x_0 と X_t の関係を図1に示す．このとき
 には x_0 と X_t の値は1対1に対応していることがわかる．また3次の項を含んでいる
 ので正確には直線になっていないが，ほぼ直線と見なせるほど3次の項の効果は大き
 くないことがわかる．

ここでは， $X_0 = \langle X_0 \rangle$ のときの x_0 の値を x_0 の測定値と定義しているので，

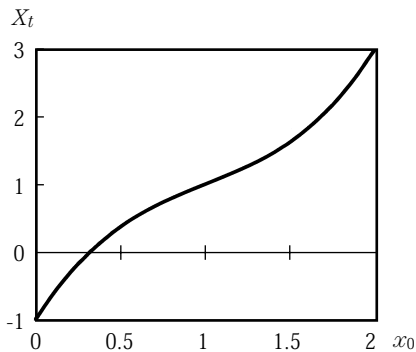


図1 式(50)の関数 ($\beta_1=1$ ， $\beta_3=1$ ， $X_0=1$)

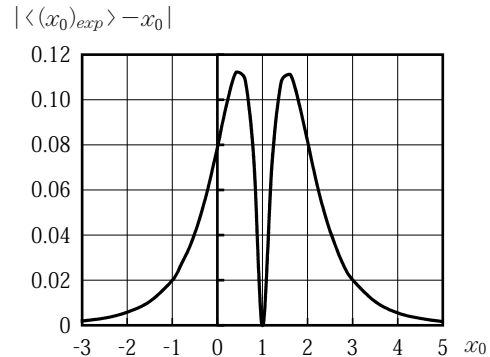


図2 $(x_0)_{exp}$ の平均 $\langle (x_0)_{exp} \rangle$ と
 x_0 の差 $|\langle (x_0)_{exp} \rangle - x_0|$

$$(x_0)_{exp} = \langle X_0 \rangle + B(\langle X_0 \rangle)^{1/3} - \frac{\beta_1}{3\beta_3} B(\langle X_0 \rangle)^{-1/3} \quad (53)$$

である。

$(x_0)_{exp}$ は, X_t が x_0 と X_0 の関数なので, x_0 と X_0 の関数である. 図2に $\langle (x_0)_{exp} \rangle$ と x_0 の差 $|\langle (x_0)_{exp} \rangle - x_0|$ が x_0 の値によってどのように変化するかを示す. ここでプローブの波動関数をガウス型と仮定し, $\langle X_0 \rangle = 1$, $\delta X_0 = 0.5$ とした. $(x_0)_{exp}$ は x_0 と X_0 の関数であって $\langle X_0 \rangle$ の関数ではないが, 式(50)の場合には $x_0 = \langle X_0 \rangle$ のときに常に $(x_0)_{exp} = x_0$ が成立することを示すことができる. 図2より $x_0 = 1 = \langle X_0 \rangle$ のとき $|\langle (x_0)_{exp} \rangle - x_0| = 0$ であるが, それ以外のときには0でないことがわかる. 特に $x_0 = 0.5$ と $x_0 = 1.5$ 付近で $|\langle (x_0)_{exp} \rangle - x_0|$ が最大になっている.

図3に $x_0 = 0.5, 1.0, 1.5$ のときの $(x_0)_{exp}$ を X_0 の関数として示す. $x_0 = 1.0$ (実線) のときには, 原点を $(\langle X_0 \rangle, x_0) = (1, 1)$ に移動したときに $(x_0)_{exp}$ が奇関数になっていることがわかる. ガウス型の $|\xi(X_0)|^2$ は $X_0 - \langle X_0 \rangle$ の偶関数であるから $\langle (x_0)_{exp} \rangle = 1 = x_0$ となることを図から読み取ることができる. (図では $X_0 = 1$ と $(x_0)_{exp} = 1$ の直線を点線で示している.) それに対して, $x_0 = 0.5$ や $x_0 = 1.5$ の場合には, 原点を $(\langle X_0 \rangle, x_0)$ に移動しても明らかに奇関数になっていないので, $\langle (x_0)_{exp} \rangle$ は x_0 に等しくならないことがわかる.

以上のことから, プローブのある特定の波動関数を用いて, すべての x_0 に対して $\langle (x_0)_{exp} \rangle = x_0$ を成立させることが非常に難しいことがわかる. 上で具体的に考えたガウス型の波動関数の場合には明らかに不可能であった.

この章では線形性の仮説が満たされない場合の一つの例として, $(x_0 - X_0)^3$ を含む場合(50)を考察した. 結果は, 3次以上の項を含む場合には, プローブの特定の波動関数を用いて, すべての x_0 に対して $\langle (x_0)_{exp} \rangle = x_0$ を成立させることは不可能であることを示唆している. これは $(x_0)_{exp}$ の x_0 依存性のためである. このことは線形性の仮説の正しさを示唆していると筆者は考える.

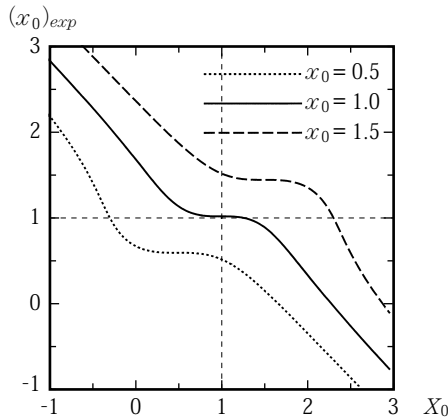


図3 X_0 の関数としての $(x_0)_{exp}$ ($x_0 = 0.5, 1.0, 1.5$ の場合)

7 まとめと考察

本論文では、相互作用後の粒子とプローブの位置演算子は、相互作用前のそれらの位置演算子の線形結合で与えられるという線形性の仮説(4)が、位置の測定装置の相互作用の場合には、すべての相互作用で成立していることを証明しようと試みた。その際に測定装置が満たさなければならないと考えた条件は、次の3つである：①位置の測定装置においては測定結果は一意的に決定されなければならない。②空間の一様性という対称性から、粒子とプローブの相互作用は運動量を保存しなければならない。③空間の等方性から、相互作用は角運動量を保存しなければならない。

しかし3つの条件から最終的に得られた結果は、1次元の場合には式(41)、(42)であり、式(41)と(42)の任意の関数 $h(x)$ 、 $i(x)$ が定数のときのみ、式(41)と(42)は線形性の仮説(4)と一致した。

そこで1次だけでなく、 $(x_0 - X_0)$ の3次の項まで含んだ場合を考察した。3次方程式を解くことによって x_0 の測定値 $(x_0)_{exp}$ をもとめることができる。その結果興味深いことがわかった。それはガウス型のプローブの初期状態の波動関数を用いた場合には、すべての x_0 に対して測定値の平均 $\langle (x_0)_{exp} \rangle$ が測定対象の値 x_0 に等しくすることができないことである。3次の項まで含んだ場合にはガウス型以外の波動関数を用いても、すべての x_0 に対して $\langle (x_0)_{exp} \rangle = x_0$ を成立させることはできないであろう。このことは定数以外の $h(x)$ 、 $i(x)$ を用いた場合には、すべての x_0 に対して $\langle (x_0)_{exp} \rangle = x_0$ を成立させることは不可能であることを強く示唆している。

本論文では証明することはできなかったが、本論文の結果は、すべての x_0 に対して $\langle (x_0)_{exp} \rangle = x_0$ が成立するという条件を課すことによって、線形性の仮説が証明できるということを示している。

参考文献

- 1) 小杉誠司「Heisenbergの不確定性原理における位置測定の誤差」、『淑徳短期大学紀要』第48号, 2009, p.155-166.
- 2) J. von Neumann, "Mathematical Foundations of Quantum Mechanics", Princeton University Press, 1955.
- 3) Masanao Ozawa, "Position measuring interactions and the Heisenberg uncertainty principle", Phys. Lett. A299, 2002, p.1-7.
- 4) Masanao Ozawa, "Physical content of Heisenberg's uncertainty relation: limitation and reformulation", Phys. Lett. A318, 2003, p.21-29.
- 5) A. Messiah, "Quantum Mechanics", Dover Publications, 1999, p.651.
- 6) 寺澤寛一『自然科学者のための数学概論』岩波書店, 1954, p.320.
- 7) A. Messiah, "Quantum Mechanics", Dover Publications, 1999, p.531.
- 8) 寺澤寛一『自然科学者のための数学概論』岩波書店, 1954, p.323.