

Heisenbergの不確定性原理における 位置の測定値の不確定性

小 杉 誠 司

(2010年8月29日受理)

要 約

Heisenbergの不確定性原理において、位置の測定値の不確定性として何を用いるべきかについて考察した。測定対象の位置としては、測定前の位置 \hat{x}_0 と測定後の位置 \hat{x}_t の2つが考えられる。位置 \hat{x}_t の測定値 $(x_t)_{\text{exp}}$ の不確定性はこの測定値の測定誤差 $\epsilon(x_t)$ である。しかし位置 \hat{x}_0 の測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の不確定性は測定誤差 $\epsilon(x_0)$ ではなく、測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の標準偏差 $\sigma((x_0)_{\text{exp}})$ である。位置の測定値の不確定性として $\epsilon(x_t)$ または $\sigma((x_0)_{\text{exp}})$ を用いた場合には、Heisenbergの不確定性関係は成立している。2つの位置情報の不確定性 $\epsilon(x_t)$ と $\sigma((x_0)_{\text{exp}})$ の非対称性を引き起こしているのは波束の収縮である。

キーワード 不確定性関係, 測定誤差, 測定値の不確定性, 運動量の擾乱,
波束の収縮

1 はじめに

前論文 I ¹⁾ において位置の測定値の誤差について考察し、Ozawaの測定値の定義を採用すると、一般には正しい測定値が得られないことを示した。更にその測定値を用いて定義されたOzawaの測定誤差が正しくないために、その測定誤差には具体的にいくつかの不合理な点が存在することを示した。一例を挙げると、Ozawaの測定誤差は測定対象の波動関数の標準偏差に依存していて、その位置の標準偏差が0の場合にしか、誤差が0にならない。正しい測定理論は測定誤差が0のとき、対象粒子の任意の状態に対してBornの確率則を再現しなければならない。しかし上で述べたことは、Ozawaの誤差を採用すると粒子の特別な状態に対してのみBornの確率則を再現し、一般の状態に対しては再現しないことを意味しているので、不合理である。

本論文では、測定過程に関連したHeisenbergの不確定性原理^{2,3)}において、位置の測定値の不確定性として何を用いるべきかについて考察する。測定過程に関連したHeisenbergの不確定性関係式は

$$(\Delta x)_m(\Delta p)_{\text{dis}} \geq \hbar/2 \quad (1)$$

である．ここで $(\Delta x)_m$ は位置測定によって得られた測定値の不確定性， $(\Delta p)_{\text{dis}}$ は位置測定が引き起こした対象粒子の運動量の擾乱 (disturbance) である．

位置測定とは測定前の対象粒子の位置 \hat{x}_0 を測定することであると，一般には考えられているが，その他に，測定後の粒子の位置 \hat{x}_t の測定が考えられる．Ozawa は \hat{x}_0 の測定を考え，その測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の不確定性は測定誤差 $\epsilon(x_0)$ であるとみなした．そして不確定性関係 (1) を破る位置測定があることを示した．^{4,5)} 前論文 I ¹⁾ で明らかにしたように，Ozawa が定義した測定誤差は正しくないが，正しい測定誤差 $\epsilon(x_0)$ を用いても，Ozawa が指摘したように関係式 (1) は成立していない．しかし測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の不確定性 $(\Delta x)_m$ は測定誤差 $\epsilon(x_0)$ ではなく，測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の標準偏差 $\sigma((x_0)_{\text{exp}})$ であることが本論文で明らかにされる．そして $(\Delta x)_m$ として $\sigma((x_0)_{\text{exp}})$ を用いた場合には，関係式 (1) が成立していることが示される．

それに反して，測定後の粒子の位置 \hat{x}_t の測定値 $(x_t)_{\text{exp}}$ の場合には，その不確定性は測定誤差 $\epsilon(x_t)$ であり， $(\Delta x)_m$ として $\epsilon(x_t)$ を用いた場合には，不確定性関係式 (1) は成立していることがわかる．この不確定性関係こそ，Heisenberg が元来考えていた不確定性関係であることを，彼の著書の分析を通して明らかにされる．

上で述べたように，測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の不確定性は測定誤差 $\epsilon(x_0)$ ではなく測定値の標準偏差 $\sigma((x_0)_{\text{exp}})$ であるが，測定値 $(x_t)_{\text{exp}}$ のそれは測定誤差 $\epsilon(x_t)$ であるという非対称性が存在する．その原因は測定後に起こる波束の収縮であることが5章で明らかにされる．波束の収縮を位置測定モデルを用いて分析すると，測定装置が波束のフィルターとして働き，区間 $\{x_0 | (x_0)_{\text{exp}} - \epsilon(x_0)/2 \leq x_0 \leq (x_0)_{\text{exp}} + \epsilon(x_0)/2\}$ にある対象粒子の波だけを通し，測定後に区間 $\{x_t | (x_t)_{\text{exp}} - \epsilon(x_t)/2 \leq x_t \leq (x_t)_{\text{exp}} + \epsilon(x_t)/2\}$ でのみ0でない値をもつ波束として出現させていることがわかる．

2 位置測定モデル

議論を簡単にするために，対象粒子とプローブが1次元の運動をおこなう場合を考察する．対象粒子とプローブは時刻0に相互作用を始め，時刻 t に相互作用を終了するとする．本論文では次のような位置の測定装置を考えている．測定の前にプローブは，所定の位置に小さな位置の揺らぎを持った状態として置かれている．粒子とプローブの相互作用が終了した直後にプローブの位置 \hat{X}_t を別の測定装置を用いて測定し，その測定値を用いて対象粒子の位置 \hat{x}_0 と \hat{x}_t を予測する． \hat{X}_t を測定する際の測定誤差は0であり，またこの測定によって対象粒子の運動量は擾乱されないと仮定されている．

本論文では，相互作用後の粒子とプローブの位置演算子 \hat{x}_t ， \hat{X}_t は，相互作用前のそれらの位置演算子 \hat{x}_0 ， \hat{X}_0 の線形結合で与えられると仮定する：

$$\hat{x}_t = \alpha_1 \hat{x}_0 + \alpha_2 \hat{X}_0, \quad \hat{X}_t = \beta_1 \hat{x}_0 + \beta_2 \hat{X}_0. \quad (2)$$

ここで α_i, β_i は実数であり, 相互作用が粒子とプローブの運動量の和を保存するときには, 次の条件を満たさなければならない:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1. \quad (3)$$

$\beta_1 = 0$ のとき式(2)より \hat{x}_0 は \hat{X}_0 と \hat{X}_t の関数として表わされないから, \hat{X}_t の測定値から \hat{x}_0 の測定値を求めることはできない. 従って位置の測定装置においては

$$\beta_1 \neq 0 \quad (4)$$

でなければならない.

線形性の仮説(2)の妥当性については, 前論文II⁶⁾で議論した. 前論文IIでは不完全にしか証明されていないが, その妥当性については別の機会に更に考察する予定である.

対象粒子とプローブの $t=0$ での状態ベクトルをそれぞれ $|\phi_0\rangle, |\xi_0\rangle$ とし, それらの位置の標準偏差 $\sigma(x_0), \sigma(X_0)$ が0の場合を考える. このとき位置演算子 \hat{x}_t, \hat{X}_t の標準偏差も0になるので, 式(2)より \hat{x}_0 の測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ は, \hat{X}_t の測定値を X として

$$(x_0)_{\text{exp}} = \frac{1}{\beta_1} X - \frac{\beta_2}{\beta_1} X_0$$

であることがわかる. ここで X_0 は $t=0$ でのプローブの位置である.

プローブの位置の標準偏差 $\sigma(X_0)$ が0でないときには, 我々はプローブの波動関数 $\xi_0(X_0)$ のどの位置成分と対象粒子が相互作用したのか知ることはできない. 従って $\xi_0(X_0)$ の位置の平均値 $\langle \hat{X}_0 \rangle$ を用いて, \hat{x}_0 の測定値を

$$(x_0)_{\text{exp}} = \frac{1}{\beta_1} X - \frac{\beta_2}{\beta_1} \langle \hat{X}_0 \rangle \quad (5)$$

と定義する. 従って測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ を与える位置演算子 $(\hat{x}_0)_{\text{exp}}$ は

$$(\hat{x}_0)_{\text{exp}} = \frac{1}{\beta_1} \hat{X}_t - \frac{\beta_2}{\beta_1} \langle \hat{X}_0 \rangle \hat{I} \quad (6)$$

$$= \hat{x}_0 + \frac{\beta_2}{\beta_1} (\hat{X}_0 - \langle \hat{X}_0 \rangle \hat{I}) \quad (7)$$

となる.

従って相互作用前の粒子の位置 \hat{x}_0 の測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の測定誤差は

$$\epsilon(x_0) = \langle \phi_0, \xi_0 | \{ (\hat{x}_0)_{\text{exp}} - \hat{x}_0 \}^2 | \phi_0, \xi_0 \rangle^{1/2} \quad (8)$$

と定義される．ここでテンソル積 $|\phi_0\rangle \otimes |\xi_0\rangle$ を $|\phi_0, \xi_0\rangle$ と略記した．式(7)を用いて

$$\epsilon(x_0) = \left| \frac{\beta_2}{\beta_1} \right| \sigma(X_0) \quad (9)$$

となる．

式(8)を具体的に位置表示で表すと、

$$\epsilon(x_0)^2 = \int \left\{ x_0 + \frac{\beta_2}{\beta_1} (X_0 - \langle \hat{X}_0 \rangle) - x_0 \right\}^2 |\phi_0(x_0)|^2 |\xi_0(X_0)|^2 dx_0 dX_0 \quad (10)$$

となる．この式より測定誤差の物理的意味が明らかになる．すなわち位置演算子 \hat{x}_0 と \hat{X}_0 の固有ベクトルをそれぞれ $|x_0\rangle$, $|X_0\rangle$, 固有値を x_0 , X_0 とし, 状態 $|x_0\rangle$ と $|X_0\rangle$ にある粒子とプローブが相互作用したとき, \hat{X}_t の測定値は $X = \beta_1 x_0 + \beta_2 X_0$ となり, \hat{x}_0 の測定値は $(x_0)_{\text{exp}} = x_0 + \frac{\beta_2}{\beta_1} (X_0 - \langle \hat{X}_0 \rangle)$ となる．このとき粒子の位置 \hat{x}_0 の真の値は x_0 であるから, $x_0 + \frac{\beta_2}{\beta_1} (X_0 - \langle \hat{X}_0 \rangle) - x_0$ が測定誤差になる．この誤差の2乗を粒子とプローブがそれぞれ状態 $|x_0\rangle$, $|X_0\rangle$ にある確率 $|\phi_0(x_0)|^2$, $|\xi_0(X_0)|^2$ をかけて平均した物理量が式(10)の $\epsilon(x_0)^2$ である．

次に相互作用後の粒子の位置 \hat{x}_t に対する測定値 $(x_t)_{\text{exp}}$ について考察する．式(2)より \hat{x}_0 を消去して

$$\hat{x}_t = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \hat{X}_t - \frac{1}{\beta_1 \Gamma} \hat{X}_0$$

を得る．ここで $\Gamma \equiv 1/(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)$ である．粒子とプローブが相互作用しているときの時間発展演算子を \hat{U} としたとき, \hat{U} のユニタリ性より $|\Gamma| = 1$ を得る．

$(x_0)_{\text{exp}}$ の場合と同様に考えると, 上の式より $\sigma(x_0) = \sigma(X_0) = 0$ の場合には, \hat{x}_t の理論的測定値は

$$(x_t)_{\text{exp}} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} X - \frac{1}{\beta_1 \Gamma} X_0$$

となることがわかる．従って $(x_0)_{\text{exp}}$ の場合と同様にして, 測定値 $(x_t)_{\text{exp}}$ を与える位置演算子 $(\hat{x}_t)_{\text{exp}}$ は

$$4 \quad (\hat{x}_t)_{\text{exp}} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \hat{X}_t - \frac{1}{\beta_1 \Gamma} \langle \hat{X}_0 \rangle \hat{I} \quad (11)$$

$$= \hat{x}_t + \frac{1}{\beta_1 \Gamma} (\hat{X}_0 - \langle \hat{X}_0 \rangle) \hat{I} \quad (12)$$

となることがわかる．

従って \hat{x}_t の測定値 $(x_t)_{\text{exp}}$ の測定誤差は

$$\epsilon(x_t) = \langle \phi_0, \xi_0 | \{(\hat{x}_t)_{\text{exp}} - \hat{x}_t\}^2 | \phi_0, \xi_0 \rangle^{1/2} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{|\beta_1|} \sigma(X_0) \quad (14)$$

となる.

3 運動量の擾乱

相互作用後の対象粒子とプローブの運動量 \hat{p}_t と \hat{P}_t を求める. それらは \hat{p}_0 , \hat{P}_0 , \hat{x}_0 , \hat{X}_0 の関数であるので, 一般に

$$\hat{p}_t = f_{0,0} + f_{1,0}\hat{p}_0 + f_{0,1}\hat{P}_0 + f_{2,0}\hat{p}_0^2 + f_{1,1}\hat{p}_0\hat{P}_0 + f_{0,2}\hat{P}_0^2 + \dots \quad (15)$$

と展開できる. ここで $f_{i,j}$ は \hat{x}_0 と \hat{X}_0 の任意の関数である. 量子化の条件

$$[\hat{x}_0, \hat{p}_0] = i\hbar \quad (16)$$

より

$$[\hat{x}_0, \hat{p}_0^n] = ni\hbar\hat{p}_0^{n-1} \quad (n \geq 2) \quad (17)$$

が成立する. 相互作用後の演算子に対しても式 (16) と同様の量子化の条件が成立しなければならないので, 式 (2) を用いて

$$\begin{aligned} [\hat{x}_t, \hat{p}_t] &= \alpha_1 \{f_{1,0}i\hbar + f_{2,0}2i\hbar\hat{p}_0 + f_{1,1}i\hbar\hat{P}_0 + \dots\} \\ &\quad + \alpha_2 \{f_{0,1}i\hbar + f_{1,1}i\hbar\hat{p}_0 + f_{0,2}2i\hbar\hat{P}_0 + \dots\} = i\hbar \end{aligned} \quad (18)$$

これより

$$\alpha_1 f_{1,0} + \alpha_2 f_{0,1} = 1, \quad (19)$$

$$2\alpha_1 f_{2,0} + \alpha_2 f_{1,1} = 0, \quad \alpha_1 f_{1,1} + 2\alpha_2 f_{0,2} = 0 \quad (20)$$

を得る. 同様に

$$\begin{aligned} [\hat{X}_t, \hat{p}_t] &= \beta_1 \{f_{1,0}i\hbar + f_{2,0}2i\hbar\hat{p}_0 + f_{1,1}i\hbar\hat{P}_0 + \dots\} \\ &\quad + \beta_2 \{f_{0,1}i\hbar + f_{1,1}i\hbar\hat{p}_0 + f_{0,2}2i\hbar\hat{P}_0 + \dots\} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

より,

$$\beta_1 f_{1,0} + \beta_2 f_{0,1} = 0 \quad (22)$$

を得る. 式 (18) と (21) より,

$$(\alpha_1 - \beta_1)[\{f_{1,0}i\hbar + f_{2,0}2i\hbar\hat{p}_0 + f_{1,1}i\hbar\hat{P}_0 + \dots\} - \{f_{0,1}i\hbar + f_{1,1}i\hbar\hat{p}_0 + f_{0,2}2i\hbar\hat{P}_0 + \dots\}] = i\hbar. \quad (23)$$

式(3)と $|\Gamma| = 1$ より $\alpha_1 - \beta_1 = \pm 1$ であるから, 式(23)より

$$2f_{2,0} - f_{1,1} = 0, \quad f_{1,1} - 2f_{0,2} = 0. \quad (24)$$

上の式より

$$f_{2,0} = f_{0,2}. \quad (25)$$

これと式(20)より

$$f_{2,0} = f_{1,1} = f_{0,2} = 0. \quad (26)$$

上の計算では演算子の2次の項 \hat{p}_0^2 , $\hat{p}_0\hat{P}_0$, \hat{P}_0^2 までしか明示していないが, それ以上の項に対する係数に対しても, 式(26)と同様な式が成立することがわかる:

$$f_{i,j} = f_{j,i} = 0, \quad (i + j \geq 3). \quad (27)$$

式(19)と(22)を連立して解いて

$$f_{1,0} = \Gamma\beta_2, \quad f_{0,1} = -\Gamma\beta_1. \quad (28)$$

従って

$$\hat{p}_t = f(\hat{x}_0, \hat{X}_0) + \Gamma\beta_2\hat{p}_0 - \Gamma\beta_1\hat{P}_0 \quad (29)$$

となる. ここで $f_{0,0}$ を f と表した.

同様にして, \hat{P}_t を式(15)のように展開して, 条件 $[\hat{x}_t, \hat{P}_t] = 0$, $[\hat{X}_t, \hat{P}_t] = i\hbar$ より $f_{i,j}$ を求めると

$$\hat{P}_t = g(\hat{x}_0, \hat{X}_0) - \Gamma\alpha_2\hat{p}_0 + \Gamma\alpha_1\hat{P}_0 \quad (30)$$

を得る. ここで $g(\hat{x}_0, \hat{X}_0)$ は \hat{x}_0 と \hat{X}_0 の任意の関数である.

対象粒子とプローブの運動量の和は相互作用の前後で保存しなければならないので,

$$\hat{p}_0 + \hat{P}_0 = \hat{p}_t + \hat{P}_t. \quad (31)$$

6 これより式(29)の $f(\hat{x}_0, \hat{X}_0)$ と式(30)の $g(\hat{x}_0, \hat{X}_0)$ がキャンセルしなければならないことがわかる:

$$g(\hat{x}_0, \hat{X}_0) = -f(\hat{x}_0, \hat{X}_0). \quad (32)$$

また式(3)の条件が成立するとき, $-\Gamma(\alpha_2 - \beta_2) = 1$, $\Gamma(\alpha_1 - \beta_1) = 1$ が成立するので, 式(29), (30)を用いて, このとき確かに運動量が保存していることがわかる.

対象粒子の運動量の変化は、式 (29) を用いて

$$\hat{p}_t - \hat{p}_0 = f(\hat{x}_0, \hat{X}_0) + (\Gamma\beta_2 - 1)\hat{p}_0 - \Gamma\beta_1\hat{P}_0. \quad (33)$$

そして運動量の擾乱は式 (33) を用いて

$$(\Delta p)_{\text{dis}} = \langle \phi_0, \xi_0 | \{\hat{p}_t - \hat{p}_0\}^2 | \phi_0, \xi_0 \rangle^{1/2} \quad (34)$$

となる。

4 位置の測定値の不確定性

Ozawa は、不確定性関係 (1) における位置の不確定性 $(\Delta x)_m$ は測定誤差 $\epsilon(x_0)$ であると考え、不確定性関係 (1) が成立していない位置測定の例を具体的に挙げている。^{4,5)} しかし $(\Delta x)_m$ の候補として測定誤差 $\epsilon(x_t)$ や測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の標準偏差 $\sigma((x_0)_{\text{exp}})$ などを挙げることもできる。不確定性関係 (1) の位置の不確定性 $(\Delta x)_m$ として、なにを採用すればよいのであろうか？

1929年の春にシカゴ大学でおこなった講義をまとめたものを、Heisenberg は1930年に発刊している。^{7,8)} そこでHeisenberg は、「例えば、電子の速度が正確に知られており、これに反して位置は全く知られていないと仮定しよう。そのときは、そのあとで位置をきめるどんな観測をしても、電子の運動量は変化する」と、運動量の擾乱について述べたあと、次のように続けている：「そしてこの（運動量）の変化は、実験後の電子の運動に関するわれわれの知識が、不確定性関係で限定されることになるくらいの不確定さをもたねばならない。」このようにHeisenberg は測定後の電子の運動に着目し、不確定性関係が測定後の電子の運動に関するものであることを明確に述べている。この後Heisenberg は、位置測定における不確定性関係の一例として、有名な γ 線顕微鏡について説明している。多くの教科書に見られるように、 x 方向の位置測定の精度 Δx を光学の法則（分解能）から求め、 γ 線が電子に与える反跳の x 方向の不確定さ Δp_x を求めたあと、測定後の電子の運動の知識に対して、 $\Delta p_x \Delta x \sim h$ が結論されるとHeisenberg は述べている。そしてこの後に、幅 d のスリットを持った衝立に入射して来る電子と、シンチレーション・カウンターの2つの位置測定の例を挙げている。この両者の場合も、測定後の対象の運動に対して、不確定性関係式を導出している。

これらの例はHeisenberg の不確定性関係は測定後の粒子の位置 \hat{x}_t の測定誤差 $\epsilon(x_t)$ と運動量の擾乱に対する関係式であることを示している。^{注1)} その理由は、次の章で明らかにされるように、測定後の粒子の状態は測定誤差 $\epsilon(x_t)$ によって支配されているからである。実際に、得られた測定値 $(x_t)_{\text{exp}}$ の不確定性は測定誤差 $\epsilon(x_t)$ であるので、測定誤差 $\epsilon(x_t) = 0$ のときには、その不確定性は0である。そしてこのとき、実際に測定後に粒子の位置を測定すれば、その値は測定値 $(x_t)_{\text{exp}}$ に一致する。

対象の位置測定というのは測定前の対象の位置を測定することであり、相互作用後の対象の位置を測定することではないと一般には考えられている。従って位置測定の誤差といえば $\epsilon(x_0)$ のことを指すと考えるのが当然であり、Ozawaもそのように考えたのであるが、意外にも、Heisenbergの真意はそうではない。

よく知られているように、任意の2つのオブザーバブル \hat{A} , \hat{B} に対して、次の不等式が常に成立する⁹⁾：

$$\sigma(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2}|\langle\Phi|[\hat{A}, \hat{B}]|\Phi\rangle|. \quad (35)$$

ここで $|\Phi\rangle$ は、今の場合には、対象粒子とプローブの2体系のヒルベルト空間の任意のベクトルであり、 $\sigma(A)$ と $\sigma(B)$ は、それぞれ演算子 \hat{A} , \hat{B} の標準偏差である。標準偏差の定義より

$$\langle\Phi|\hat{A}^2|\Phi\rangle = \sigma^2(A) + \langle\Phi|\hat{A}|\Phi\rangle^2 \geq \sigma^2(A).$$

従って、次の不等式も常に成立する：

$$\sigma(A)(\langle\Phi|\hat{B}^2|\Phi\rangle)^{1/2} \geq \frac{1}{2}|\langle\Phi|[\hat{A}, \hat{B}]|\Phi\rangle|, \quad (36)$$

$$(\langle\Phi|\hat{A}^2|\Phi\rangle)^{1/2}(\langle\Phi|\hat{B}^2|\Phi\rangle)^{1/2} \geq \frac{1}{2}|\langle\Phi|[\hat{A}, \hat{B}]|\Phi\rangle|. \quad (37)$$

式 (12), (33) を用いると、交換関係

$$[(\hat{x}_t)_{\text{exp}} - \hat{x}_t, \hat{p}_t - \hat{p}_0] = -i\hbar \quad (38)$$

が成立するから、上の不等式 (37) を用いて

$$\epsilon(x_t)(\Delta p)_{\text{dis}} \geq \hbar/2 \quad (39)$$

を得る。このように位置の不確定性として $\epsilon(x_t)$ を用いたときには、不確定性関係(1)は成立している。この不確定性関係こそHeisenbergが元々考えていた関係式であると筆者は考えている。

測定前の位置 \hat{x}_0 に対する測定誤差 $\epsilon(x_0)$ を、位置の不確定性として用いた場合にはどうなるであろうか？ 式 (7), (33) より交換関係が

$$[(\hat{x}_0)_{\text{exp}} - \hat{x}_0, \hat{p}_t - \hat{p}_0] = -\Gamma\beta_2(i\hbar) \quad (40)$$

となるので、式 (37) を用いて

$$\epsilon(x_0)(\Delta p)_{\text{dis}} \geq |\beta_2|\hbar/2 \quad (41)$$

を得る。従って、 $|\beta_2| \geq 1$ のときには不確定性関係は成立するが、一般には成立して

いない。

前論文 I ¹⁾ で指摘したように、Ozawa の測定誤差の定義は正しくないが、 $\beta_2 = 0$ のとき $\epsilon(x_0)(\Delta p)_{\text{dis}} = 0$ となり、不確定性関係が成立していないという Ozawa の結果 ^{4,5)} は、我々の結果と一致している。

Heisenberg は二つの測定誤差 $\epsilon(x_0)$ と $\epsilon(x_t)$ を区別していなかった。これは、量子力学が完成したばかりの当時は測定理論が未熟で、von Neumann の射影仮説に見られるように、測定後の粒子の位置 \hat{x}_t は測定前の粒子の位置 \hat{x}_0 に等しいと考えていたためと推測される。^{注2)} $\hat{x}_t = \hat{x}_0$ かつ $\Gamma = -1$ のときには、 $(x_0)_{\text{exp}} = (x_t)_{\text{exp}}$ 、 $\epsilon(x_t) = \epsilon(x_0)$ 、 $|\beta_2| = 1$ となるので、この場合には測定誤差 $\epsilon(x_0)$ を位置の不確定性として用いた不確定性関係 (1) は成立している。

それでは測定前の粒子の位置 \hat{x}_0 の測定値は、どのような不確定性を持っているのであろうか？ 対象粒子の初期状態の位置の不確定性 $\sigma(x_0)$ が 0 のときには、確かに得られた測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の不確定性は $\epsilon(x_0)$ である。このことは測定誤差 $\epsilon(x_0)$ の定義式 (8) より、 $x_0 = \bar{x}_0$ のとき、測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ は実際に $\bar{x}_0 - \epsilon(x_0) \leq (x_0)_{\text{exp}} \leq \bar{x}_0 + \epsilon(x_0)$ 程度の値をとることから明らかである。

しかし $\sigma(x_0)$ が 0 でないときには、測定誤差 $\epsilon(x_0) = 0$ で粒子の位置を測定したとしても、得られた測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の不確定性は 0 ではなく、 $\sigma(x_0)$ 程度あると考えられる。このとき、たまたま得られた測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ が粒子のどの位置成分を測定したのか、我々は知ることはできないからである。1 回の位置測定によって相互作用前の位置の測定値を得たとき、量子力学によれば $t = 0$ に対象がその位置にいたと主張することはできない。初期状態の位置の不確定性 $\sigma(x_0)$ と測定誤差 $\epsilon(x_0)$ が両方とも 0 のとき、1 回の位置測定によって得られた測定値の位置に、 $t = 0$ に対象がいたと主張することができる。

このように、測定値 $(x_t)_{\text{exp}}$ の不確定性は測定誤差 $\epsilon(x_t)$ と考えてよいが、測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の場合には、その不確定性は測定誤差 $\epsilon(x_0)$ ではなく、測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の標準偏差 $\sigma((x_0)_{\text{exp}})$ と考えるべきである。線形性の仮説 (2) のもとでは $\sigma((x_0)_{\text{exp}})^2$ は

$$\begin{aligned} \sigma((x_0)_{\text{exp}})^2 &= \langle \phi_0, \xi_0 | \{ (\hat{x}_0)_{\text{exp}} - \langle (\hat{x}_0)_{\text{exp}} \rangle \}^2 | \phi_0, \xi_0 \rangle \\ &= \sigma(x_0)^2 + \epsilon(x_0)^2 \end{aligned} \quad (42)$$

となるので、 $\epsilon(x_0) = 0$ のときには $\sigma((x_0)_{\text{exp}}) = \sigma(x_0)$ 、 $\sigma(x_0) = 0$ のときには $\sigma((x_0)_{\text{exp}}) = \epsilon(x_0)$ となる。これは上で議論した $(x_0)_{\text{exp}}$ の不確定性に一致している。

測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の不確定性を $\sigma((x_0)_{\text{exp}})$ としたとき、式 (7)、(33) より

$$[(\hat{x}_0)_{\text{exp}}, \hat{p}_t - \hat{p}_0] = -i\hbar \quad (43)$$

であるので、

$$\sigma((x_0)_{\text{exp}})(\Delta p)_{\text{dis}} \geq \hbar/2 \quad (44)$$

を得る. このように, $\sigma((x_0)_{\text{exp}})$ を位置の不確定性としたとき不確定性関係 (1) が成立している.

5 波束の収縮と測定値の不確定性

前章で明らかにしたように, 1 回の位置測定によって得られた粒子の位置情報が持っている不確定性は, その位置情報が測定前のものなのか, あるいは測定後のものなのかによって大きく違ってくる. 何故相互作用前と後の位置測定において, このような違いが生じるのであろうか. それは位置測定の後には波束の収縮が起こるので, 対象粒子の初期状態の位置の不確定性 $\sigma(x_0)$ は, $(x_t)_{\text{exp}}$ の不確定性には関係しなくなるからである. 以下に, このことを我々の測定モデルを用いて導出する.

よく知られているように, 量子測定は波束の収縮を引き起こす.¹⁰⁾ 位置 \hat{x}_0 の測定の場合, その固有状態を $|x_0\rangle$ とすると, 一般に対象粒子の測定前の状態 $|\phi_0\rangle$ は $|x_0\rangle$ の重ねあわせとして表現される:

$$|\phi_0\rangle = \int \phi(x_0)|x_0\rangle dx_0. \quad (45)$$

ここで重ね合わせの係数 $\phi(x_0)$ が波動関数である. 位置の測定をおこない, 測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ を得たとすると, 測定後の粒子の状態は $|(x_0)_{\text{exp}}\rangle$ に変化する^{注3)}:

$$|\phi_0\rangle \rightarrow |(x_0)_{\text{exp}}\rangle. \quad (46)$$

これが波束の収縮である. ここで状態 $|(x_0)_{\text{exp}}\rangle$ は式 (45) の重ね合わせの状態のなかの 1 つであるが, それ以外のすべての状態は測定後に消滅している. 波束の収縮は非因果的な過程であり, ユニタリ性も保持されないので, 量子力学を認めない物理学者によって常に批判されてきた.^{注4)}

このように測定後の状態 $|(x_0)_{\text{exp}}\rangle$ は, 粒子の初期状態での位置の標準偏差 $\sigma(x_0)$ とは無関係である. 上で述べた波束の収縮の説明では, 測定誤差 $\epsilon(x_0)$ が 0 であること, また von Neumann の射影仮説が正しいことを仮定していた.

10 測定誤差 $\epsilon(x_0)$ が 0 でないときには, もう少し結果は複雑である. その場合について考察する. プローブの位置 \hat{X}_t の測定結果が X であるとき, 測定後の波動関数は

$$\Psi_t(x, X) = \langle x, X | \hat{U} | \phi_0, \xi_0 \rangle = \phi_0(x_0) \xi_0(X_0). \quad (47)$$

$$\text{ここで } x_0 = \Gamma(\beta_2 x - \alpha_2 X), \quad X_0 = \Gamma(-\beta_1 x + \alpha_1 X) \quad (48)$$

である.^{注5)} プローブの初期状態 $|\xi_0\rangle = |\bar{X}_0, l\rangle$ とする. ここで \bar{X}_0 と l は実数であり,

状態 $|\bar{X}_0, l\rangle$ は

$$\langle X_0 | \bar{X}_0, l \rangle = \begin{cases} 1/\sqrt{l} & (\bar{X}_0 - l/2 \leq X_0 \leq \bar{X}_0 + l/2 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

で定義されている。図1に関数 $\langle X_0 | \bar{X}_0, l \rangle$ を示す。このように演算子 \hat{X}_0 の固有状態 $|X_0\rangle$ はヒルベルト空間のベクトルではないが、 $l \neq 0$ のとき $|\bar{X}_0, l\rangle$ のノルムは1であるから、このとき $|\bar{X}_0, l\rangle$ はヒルベルト空間のベクトルである。

a, b を実数とすると、関数 $\langle X_0 | \bar{X}_0, l \rangle$ に対して

$$\langle X_0 + a | \bar{X}_0, l \rangle = \langle X_0 | \bar{X}_0 - a, l \rangle, \tag{49}$$

$$\langle bX_0 | \bar{X}_0, l \rangle = \langle X_0 | \bar{X}_0/b, l/|b| \rangle / \sqrt{|b|}, \quad (b \neq 0) \tag{50}$$

が成立するので、式(47)の $\xi_0(X_0)$ は

$$\xi_0(X_0) = \langle \Gamma(-\beta_1 x + \alpha_1 X) | \xi_0 \rangle = \langle x | (x_t)_{\text{exp}}, l/|\beta_1| \rangle / \sqrt{|\beta_1|} \tag{51}$$

となる。ここで $(x_t)_{\text{exp}} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} X - \frac{1}{\Gamma\beta_1} \bar{X}_0$ である。 $x = (x_t)_{\text{exp}}$ のとき $x_0 = \Gamma(\beta_2 x - \alpha_2 X) = (x_0)_{\text{exp}}$ であるが、 $\langle x | (x_t)_{\text{exp}}, l/|\beta_1| \rangle$ が0でない x の区間において $\phi_0(x_0)$ の値の変化が非常に小さいとき、 $\phi_0(x_0) \approx \phi_0((x_0)_{\text{exp}})$ としてよい。(l の値を十分に小さくすれば、常にこのようにすることができる。) このとき $\phi_0(x_0)$ は x の関数ではないから、測定後の粒子の波動関数は $\langle x | (x_t)_{\text{exp}}, l/|\beta_1| \rangle$ である。^{注6)}

このことから測定後の粒子の位置の標準偏差は測定誤差 $\epsilon(x_t)$ に等しいことがわかる。また式(48)より、 $x = (x_t)_{\text{exp}} \pm l/2|\beta_1|$ のとき $x_0 = (x_0)_{\text{exp}} \pm \frac{|\beta_2|}{2|\beta_1|} l = (x_0)_{\text{exp}} \pm \epsilon(x_0)/2$ であるから、この測定の場合には区間 $\{x_0 | (x_0)_{\text{exp}} - \epsilon(x_0)/2 \leq x_0 \leq (x_0)_{\text{exp}} + \epsilon(x_0)/2\}$ の波だけが測定に関与していることがわかる。

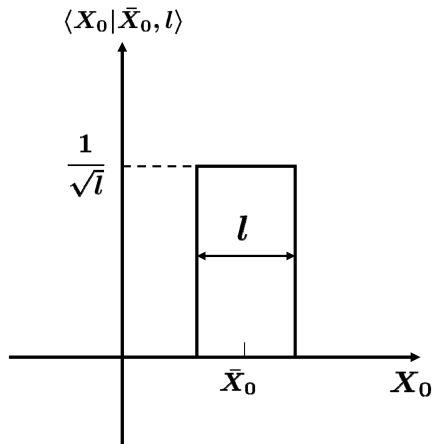


図1 関数 $\langle X_0 | \bar{X}_0, l \rangle$

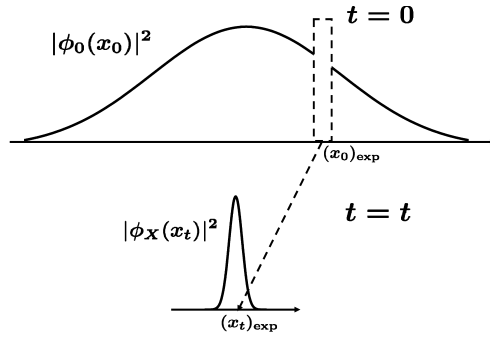


図2 測定前 ($t = 0$) と測定後 ($t = t$) の対象粒子の波束

図2の上部と下部に、それぞれ $t = 0$, $t = t$ における対象粒子の波束を示してある。図より測定装置が波束のフィルターとして働いていることがわかる。すなわち対象粒子は測定装置と相互作用することにより、区間 $\{x_0 | (x_0)_{\text{exp}} - \epsilon(x_0)/2 \leq x_0 \leq (x_0)_{\text{exp}} + \epsilon(x_0)/2\}$ の波 (図では四角の破線で示してある) だけが切り出され、測定後 ($t = t$) には、区間 $\{x_t | (x_t)_{\text{exp}} - \epsilon(x_t)/2 \leq x_t \leq (x_t)_{\text{exp}} + \epsilon(x_t)/2\}$ でのみ0でない値をもつ波束として出現している。また一般には $(x_0)_{\text{exp}} \neq (x_t)_{\text{exp}}$ であるので、von Neumann の射影仮説は一般には成立していないことがわかる。

6 まとめと考察

本論文の2章では、プローブの測定前の位置 \hat{X}_0 と測定後の位置 \hat{X}_t の情報から対象粒子の測定前の位置 \hat{x}_0 と測定後の位置 \hat{x}_t を予測する位置測定モデルを用いて、測定値 $(\hat{x}_0)_{\text{exp}}$ と $(\hat{x}_t)_{\text{exp}}$ を与える式(6)と(11)を求めた。その際、粒子とプローブの測定後の位置演算子 \hat{x}_t と \hat{X}_t が、測定前のこれらの位置演算子 \hat{x}_0 と \hat{X}_0 の線形結合で与えられると仮定した。更にこの測定値を用いて、それぞれの測定値の測定誤差 $\epsilon(x_0)$ と $\epsilon(x_t)$ を定義し、この定義式の物理的意味について位置表示を用いて考察した。

相互作用後の対象粒子の運動量 \hat{p}_t は相互作用前の演算子 \hat{p}_0 , \hat{P}_0 , \hat{x}_0 , \hat{X}_0 の関数であるので、それを \hat{p}_0 と \hat{P}_0 の冪の和で表わし、それと式(2)で与えられる \hat{x}_t と \hat{X}_t との交換関係より \hat{p}_t の具体的な式(29)を求めた。そしてこれより、 $\hat{p}_t - \hat{p}_0$ を演算子 \hat{x}_0 , \hat{X}_0 , \hat{p}_0 , \hat{P}_0 の関数(33)として求めた。

測定対象の粒子の位置としては、測定前の位置 \hat{x}_0 と測定後の位置 \hat{x}_t の2つが考えられる。測定後の粒子の状態は、測定誤差 $\epsilon(x_t)$ によって決定されているので、 \hat{x}_t の測定値 $(x_t)_{\text{exp}}$ の不確定性は測定前の粒子の不確定性 $\sigma(x_0)$ によらず、この測定値の測定誤差 $\epsilon(x_t)$ と考えてよい。そして式(39)に示したように、 $\epsilon(x_t)$ と運動量の擾乱 $(\Delta p)_{\text{dis}}$ との間には不確定性関係が成立していた。

しかし測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の測定誤差 $\epsilon(x_0)$ と $(\Delta p)_{\text{dis}}$ との間には不確定性関係は、粒子と

プローブとの間の相互作用を決めるパラメータ β_2 の値に依存し、一般には成立していない。物理的考察から測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の不確定性は $\sigma(x_0) = 0$ のときには $\epsilon(x_0)$ であるが、 $\sigma(x_0)$ が 0 でないときには $\epsilon(x_0)$ とみなすことができないこと、更に $\epsilon(x_0) = 0$ のときには $\sigma(x_0)$ であることがわかる。このことから測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の不確定性は $\epsilon(x_0)$ ではなく、測定値 $(x_0)_{\text{exp}}$ の標準偏差 $\sigma((x_0)_{\text{exp}})$ であると考えられる。 $\sigma((x_0)_{\text{exp}})$ と $(\Delta p)_{\text{dis}}$ との間には不確定性関係が成立している。Ozawa は位置 \hat{x}_0 の測定値の不確定性を $\epsilon(x_0)$ と考え、 $\epsilon(x_0)$ と $(\Delta p)_{\text{dis}}$ との間に不確定性関係が成立していないので、測定過程に関連した Heisenberg の不確定性関係 (1) は一般には成立していないと主張した。しかし位置 \hat{x}_0 の測定値の不確定性は $\epsilon(x_0)$ ではなく $\sigma((x_0)_{\text{exp}})$ であり、 $\sigma((x_0)_{\text{exp}})$ と $(\Delta p)_{\text{dis}}$ との間には不確定性関係が成立している。

このように 1 回の位置測定によって得られた対象粒子の位置情報が持っている不確定性は、その位置情報が測定前のものであるときには、測定前の粒子の位置の不確定性 $\sigma(x_0)$ に依存しているが、それが測定後の位置情報のときには $\sigma(x_0)$ にはよらない。この非対称性は、測定によって生じる波束の収縮によって引き起こされている。プローブの測定前の波動関数が図 1 に示したような簡単な関数の場合を考え、波束の収縮のプロセスを具体的に計算した。対象の波動関数 $\phi_0(x_0)$ が、幅が $\epsilon(x_0)$ の任意の区間でゆっくりと変化しているとき、測定後の対象の状態は点 $(x_t)_{\text{exp}}$ を中心とし、位置の標準偏差が $\epsilon(x_t)$ である波動関数になることがわかる。このことより、測定の際に位置の測定装置がフィルターとして働き、 \hat{x}_0 の測定値が $(x_0)_{\text{exp}}$ のときには、対象の初期状態の波 $\phi_0(x_0)$ のうち、区間 $\{x_0 | (x_0)_{\text{exp}} - \epsilon(x_0)/2 \leq x_0 \leq (x_0)_{\text{exp}} + \epsilon(x_0)/2\}$ の波のみ通過させ、測定後に区間 $\{x_t | (x_t)_{\text{exp}} - \epsilon(x_t)/2 \leq x_t \leq (x_t)_{\text{exp}} + \epsilon(x_t)/2\}$ にのみ存在する波として出現させることがわかった。

本論文は、欧文誌に投稿した論文¹¹⁾ の内容と重複していることを、お断りしておきます。

注

- 1) 不確定性関係は測定後の電子の運動に対するものであると明確にかいてあるので、Heisenberg の真意は不確定性関係 (1) が成立するという主張ではなく、測定後の対象粒子に対して $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ が成立するという主張にあると解釈することも可能と思われる。測定前の演算子に対してだけでなく、測定後の演算子 \hat{x}_t , \hat{p}_t に対しても $[\hat{x}_t, \hat{p}_t] = i\hbar$ が成立することから、測定後の粒子に対しても不確定性関係式が成立することは数学的には明らかであるが、具体的な位置測定の思考実験において、実際にこのことが成立しているか吟味していると思われる。
- 2) von Neumann の射影仮説は射影演算子を用いて定式化されている。 $\hat{x}_t = \hat{x}_0$ かつ $\Gamma = -1$ より von Neumann の射影仮説を導出することができる。($\Gamma = +1$ のときには、 $\beta_1 = 0$ になってしまう。この場合は条件 (4) より除外される。)
- 3) 本当は測定後の粒子の状態は $|(x_t)_{\text{exp}}\rangle$ である。しかし波束の収縮の説明の際には、通常

von Neumann の射影仮説を仮定するので、ここでは測定後の粒子の状態を $|(x_0)_{\text{exp}}\rangle$ とした。

- 4) 量子力学の多世界解釈では、波束の収縮はある観測者が測定過程を観測したときに起こる現象であり、他の世界にいる観測者は他の測定値を観測していると考えている。そして量子力学は測定によって分岐したすべての世界を記述していると考えているので、波束の収縮はない。従って多世界解釈では、測定過程は因果的であり、時間発展演算子のユニタリ性も保持されている。
- 5) 正確には式 (47) の波動関数に位相因子 $e^{i\delta(x_0, X_0)}$ がかかる。
- 6) ただし注5で述べたように、位相因子の不定性がある。

参考文献

- 1) 小杉誠司 「Heisenbergの不確定性原理における位置測定の影響」, 『淑徳短期大学紀要』第48号, 2009, p.155-166.
- 2) W. Heisenberg, “Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik”, Zeitschrift für Physik 43, 1927, p.172-198.
- 3) 湯川秀樹, 井上健編 『現代の科学Ⅱ / 量子論的な運動学と力学の直観的内容について』, 中央公論社, 1974, p.325-358.
- 4) Masanao Ozawa, “Position measuring interactions and the Heisenberg uncertainty principle”, Phys. Lett. A299, 2002, p.1-7.
- 5) Masanao Ozawa, “Physical content of Heisenberg’s uncertainty relation: limitation and reformulation”, Phys. Lett. A318, 2003, p.21-29.
- 6) 小杉誠司 「位置の測定装置における時間発展演算子」, 『淑徳短期大学紀要』第49号, 2010, p.1-11.
- 7) W. Heisenberg, “The physical principles of the quantum theory”, Dover Publications, 1949.
- 8) ハイゼンベルグ 玉木英彦, 遠藤真二, 小出昭一郎訳 『量子論の物理的基礎』, みすず書房, 1954.
- 9) A. Messiah, “Quantum Mechanics”, Dover Publications, 1999, p.299.
- 10) A. Messiah 前掲書9) p.197.
- 11) S. Kosugi, Prog. Theor. Phys. 123, 2010, p.431-448.