淑徳短期大学研究紀要第51号（2012.2）

位置の測定装置における時間発展演算子Ⅱ

小　杉　誠　司

（2011年10月６日受理）

要　約

相互作用後の粒子とプローブの位置演算子 $\hat{x}_t$，$\hat{X}_t$ が，相互作用前のそれらの位置演算子 $\hat{x}_0$，$\hat{X}_0$ の線形結合で与えられるという線形性の仮説を証明した．その際に位置の測定装置が満たさなければならないと考えた条件は次の４つである．①測定結果は一意的に決定されなければならない．②粒子とプローブの相互作用は運動量を保存しなければならない．③粒子とプローブの時間発展演算子 $\hat{U}$ はユニタリである．④位置 $\hat{x}_0$ の測定誤差 $\epsilon(x_0)$ は対象粒子の初期波動関数 $\phi_0(x_0)$ に依存してはならない．条件④はある特定のプローブの確率密度関数に対してだけでなく，それを少し変化させた確率密度関数に対しても成立していなければならない．

条件④の代わりに，測定値の平均は測定対象である粒子の位置 $\hat{x}_0$ の平均に等しくなければならないという条件を用いても，線形性の仮説を導出することができる．

キーワード　量子測定理論，測定誤差，運動量の保存則，測定値の平均，ユニタリ性

1　はじめに

前論文[1)]で位置の測定装置における対象粒子とプローブの時間発展演算子 $\hat{U}$ について考察した．時間発展演算子によって相互作用後の粒子とプローブの位置演算子 $\hat{x}_t$，$\hat{X}_t$ が決まる．前論文では，相互作用後の粒子とプローブの位置演算子は，相互作用前のそれらの位置演算子 $\hat{x}_0$，$\hat{X}_0$ の線形結合で与えられるという線形性の仮説

$$\hat{x}_t = \hat{X}_0 + \alpha_1(\hat{x}_0 - \hat{X}_0), \tag{1}$$

$$\hat{X}_t = \hat{X}_0 + \beta_1(\hat{x}_0 - \hat{X}_0) \tag{2}$$

1

が，位置の測定装置の相互作用の場合には，すべての相互作用で成立していることを証明しようと試みた．ここでパラメータ α_1，β_1 は実数である．これらのパラメータの値は粒子とプローブの相互作用によって決まり，相互作用前の粒子とプローブの状態にはよらない．

その際に位置の測定装置が満たさなければならないと考えた条件は，次の３つであった：

①位置の測定装置において測定結果は一意的に決定されなければならない.

②空間の一様性という対称性から，粒子とプローブの相互作用は運動量を保存しなければならない.

③空間の等方性から，相互作用は角運動量を保存しなければならない.

しかし３つの条件から最終的に得られた結果は，線形性の仮説と一致せず，$(\hat{x}_0-\hat{X}_0)^{2k+1}$, $(k=1,2,3,\ldots)$ の項を含んでいた.

そこで前論文では１次の項だけでなく，(x_0-X_0) の３次の項まで含んだ場合を考察し，３次の項の効果について調べた．その結果は，④測定値の平均は測定対象である $\hat{x}_0$ の平均に等しくなければならないという条件を課すことによって，線形性の仮説が証明できるということを示唆していた．対象粒子の状態を測定前に想定することはできないから，粒子の任意の初期状態に対してこの条件が成立しなければならない.

本論文では条件①，②と⑤時間発展演算子 $\hat{U}$ のユニタリ性，及び⑥ $\hat{x}_0$ の測定誤差 $\epsilon(x_0)$ は対象粒子の初期波動関数 $\phi_0(x_0)$ に依存してはならないという条件から線形性の仮説を導出する．更に条件⑥の代わりに条件④を要請したときにも，線形性の仮説を導出できることを示す.

2　位置測定における時間発展演算子 $\hat{U}$

対象粒子が測定装置の一部であるプローブ（probe）と時刻０で相互作用を始め，時刻 t に相互作用を終える．測定前にプローブの位置を測定しておき，相互作用を終えた直後にプローブの位置を別の測定装置によって測定し，その測定値から対象粒子の位置の測定値を予測する．その際プローブの位置の測定は誤差０でおこなうことができること，またその測定が粒子の運動量を擾乱することがないと仮定されている． x 軸上を粒子とプローブが運動する１次元の問題を考える．このとき対象粒子とプローブからなるシステムの測定前の状態を $|x_0\rangle\otimes|X_0\rangle$ とすると，測定後のシステムの状態は

$$\hat{U}|x_0,X_0\rangle=|f(x_0,X_0),g(x_0,X_0)\rangle \tag{3}$$

とならなければならない．ここで $\hat{U}$ はシステムの時間発展演算子であり，テンソル積 $|x_0\rangle\otimes|X_0\rangle$ を $|x_0,X_0\rangle$ と簡略してかいた．また $|x_0\rangle$ と $|X_0\rangle$ はそれぞれ測定前の対象粒子とプローブの位置演算子 $\hat{x}_0$ と $\hat{X}_0$ の固有ベクトルである.

式（３）の右辺は一般には状態ベクトルの重ね合わせになるが, 前論文で説明したように, 測定結果は一意的に決定されなければならないという条件により，右辺は１項のみでなければならない．また $\hat{X}_t$ の測定値 $g(x_0,X_0)$ から x_0 の値を測定するために，関数 $g(x_0,X_0)$ の値と x_0 の値が１対１に対応していなければならない.

式（３）の関数 $f(x_0,X_0)$ と $g(x_0,X_0)$ を

$$x_t=f(x_0,X0),\quad X_t=g(x_0,X_0) \tag{4}$$

とすると，

$$\hat{x}_t \equiv \hat{U}^{-1}\hat{x}_0\hat{U} = f(\hat{x}_0, \hat{X}_0), \quad \hat{X}_t \equiv \hat{U}^{-1}\hat{X}_0\hat{U} = g(\hat{x}_0, \hat{X}_0) \tag{5}$$

が以下に示すように成立する：

式（3）を用いると

$$\begin{aligned}\hat{x}_t|x_0, X_0\rangle &= \hat{U}^{-1}\hat{x}_0\hat{U}|x_0, X_0\rangle = \hat{U}^{-1}\hat{x}_0|f(x_0, X_0), g(x_0, X_0)\rangle \\ &= \hat{U}^{-1}f(x_0, X_0)|f(x_0, X_0), g(x_0, X_0)\rangle = f(x_0, X_0)|x_0, X_0\rangle.\end{aligned}$$

任意の $|x_0, X_0\rangle$ に対して上の式が成立するから，$\hat{x}_t = f(\hat{x}_0, \hat{X}_0)$．同様に任意の $|x_0, X_0\rangle$ に対して $\hat{X}_t|x_0, X_0\rangle = g(x_0, X_0)|x_0, X_0\rangle$ が成立するから，$\hat{X}_t = g(\hat{x}_0, \hat{X}_0)$．QED．

逆に $\hat{x}_t = f(\hat{x}_0, \hat{X}_0)$，$\hat{X}_t = g(\hat{x}_0, \hat{X}_0)$ のとき，式（3）が成立することがわかる．[注1)] すなわち式（3）で $\hat{U}$ を定義することと，相互作用後の位置演算子 $\hat{x}_t$，$\hat{X}_t$ を $\hat{x}_0$ と $\hat{X}_0$ のみの関数と考えることは，物理的に同じことと考えられる．

式（5）を見ればわかるように，式（3）で関数 $f(x_0, X_0)$ と $g(x_0, X_0)$ がわかれば，相互作用後の粒子とプローブの位置演算子 $\hat{x}_t$，$\hat{X}_t$ をもとめることができる．また任意の $|x_0\rangle$ と $|X_0\rangle$ に対して式（3）が成立すると考えれば，ヒルベルト空間の任意の状態ベクトルに対して $\hat{U}$ の作用をもとめることができるから，式（3）はハミルトニアンを使わずに直接時間発展演算子 $\hat{U}$ を定義していると考えることができる．前論文でも述べたが，以前は粒子とプローブの運動エネルギーと相互作用の和でハミルトニアンを作成し，それを使って時間発展演算子 $\hat{U}$ を求めていた．また $\hat{x}_t$ と $\hat{X}_t$ をもとめる際に，粒子とプローブの運動エネルギーを無視するという近似をおこなっていた．しかしこの章で述べた方法は，ハミルトニアンを使わずに式（3）で直接時間発展演算子 $\hat{U}$ を定義している．

3　運動量が保存する条件と $\hat{U}$ がユニタリである条件

前論文[1)] で指摘したように，空間の一様性（座標軸の原点をどこにとってもよい）という対称性から，運動量の保存則が得られる．式（4）は空間の一様性という対称性を満足しなければならない．このことは式（4）の関数形に制限を与える．前論文で導出しているので詳細は省略するが，このことから

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial X_0} &= 1, \\ \frac{\partial g}{\partial x_0} + \frac{\partial g}{\partial X_0} &= 1\end{aligned} \tag{3}$$

を得る．

前論文で述べたが，上の最初の偏微分方程式の一般解は $F(x)$ を任意の関数として

$f = x_0 + F(x_0 - X_0)$ である．従って式（4）より

$$x_t = x_0 + F(x_0 - X_0), \tag{6}$$

$$X_t = X_0 + G(x_0 - X_0) \tag{7}$$

を得る．ここで $G(x)$ は任意の関数である．

時間発展演算子 $\hat{U}$ は全系のベクトルのノルムを保存しなければならないから，ユニタリでなければならない．$\hat{U}$ がユニタリである条件は，任意の状態ベクトル $|\phi_0, \xi_0\rangle$ に対して

$$\langle\phi_0, \xi_0|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\phi_0, \xi_0\rangle = \langle\phi_0, \xi_0|\phi_0, \xi_0\rangle. \tag{8}$$

式（3），（4）を用いると，

$$\int |\phi_0(x_0)|^2|\xi_0(X_0)|^2 \mathrm{d}x_t\mathrm{d}X_t = \int |\phi_0(x_0)|^2|\xi_0(X_0)|^2 \mathrm{d}x_0\mathrm{d}X_0. \tag{9}$$

左辺の積分変数の変換をおこなうと

$$\mathrm{d}x_t\mathrm{d}X_t = \left|\frac{\partial(x_t, X_t)}{\partial(x_0, X_0)}\right| \mathrm{d}x_0\mathrm{d}X_0$$

であるから，式（9）より

$$\int |\phi_0(x_0)|^2|\xi_0(X_0)|^2 \left(\left|\frac{\partial(x_t, X_t)}{\partial(x_0, X_0)}\right| - 1\right) \mathrm{d}x_0\mathrm{d}X_0 = 0.$$

$\phi_0(x_0)$，$\xi_0(X_0)$ は任意の波動関数であるから，$\hat{U}$ がユニタリの条件は

$$\left|\frac{\partial(x_t, X_t)}{\partial(x_0, X_0)}\right| = 1. \tag{10}$$

式（6），（7）を（10）に代入して

$$F(x) - G(x) = 0 \quad \text{or} \quad -2x \tag{11}$$

を得る．ただしここで，$\hat{U}$ が反転変換に対して不変であることを要請した．今考えているのは空間 1 次元の場合なので，反転変換は x 軸の向きを逆にすることに対応している．従って $x_0 \to -x_0$，$X_0 \to -X_0$ に対して $x_t \to -x_t$，$X_t \to -X_t$ でなければならないから，式（6），（7）より $F(x)$ と $G(x)$ は奇関数でなければならない．

4

4　測定値の定義

$\hat{U}$ は線形演算子であるから，式（3），（6），（7）より，初期状態がそれぞれ $|\phi_0\rangle$，$|\xi_0\rangle$ である対象粒子とプローブが相互作用したときには

$$\hat{U}|\phi_0,\xi_0\rangle = \int |x_0+F(x_0-X_0),X_0+G(x_0-X_0)\rangle\phi_0(x_0)\xi_0(X_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}X_0 \quad (12)$$

となる．ここで$\phi_0(x_0)$のx_0成分を測定する場合を考えると，式（12）の右辺は

$$\int |x_0+F(x_0-X_0),X_0+G(x_0-X_0)\rangle\xi_0(X_0)\mathrm{d}X_0$$

となる．ここでX_0の積分になっていることに注意．相互作用後にプローブの位置を測定して得られた値をX_tとすると，$X_t=X_0+G(x_0-X_0)$であることがわかる．しかし我々はこのとき得られたX_tは$\xi_0(X_0)$のどのX_0成分によるものなのか知ることはできない．[注2)] 従って測定値X_tからx_0の値を予測するためには，X_0の平均値$\langle X_0\rangle$を用いてx_0の値を予測するのが合理的である：

$$X_t=\langle X_0\rangle+G((x_0)_{\mathrm{exp}}-\langle X_0\rangle),\quad ここで\quad \langle X_0\rangle=\int X_0|\xi_0(X_0)|^2\mathrm{d}X_0. \quad (13)$$

本論文では，一般にAのプローブの初期状態の確率密度関数$|\xi_0(X_0)|^2$での平均を$\langle A\rangle$とかく．X_tの測定値よりx_0の値を一意的に予測するには，X_tの値とx_0の値は1対1に対応していなければならない．このとき関数$G(x)$の逆関数$G^{-1}(x)$が存在する．従って式（7），（13）より

$$x_0 = X_0+G^{-1}(X_t-X_0), \quad (14)$$

$$\begin{aligned}(x_0)_{\mathrm{exp}} &= \langle X_0\rangle+G^{-1}(X_t-\langle X_0\rangle) \\ &= \langle X_0\rangle+G^{-1}(X_0-\langle X_0\rangle+G(x_0-X_0)).\end{aligned} \quad (15)$$

更に，もしこのとき相互作用後の対象の位置を測定したとすれば，$x_t=x_0+F(x_0-X_0)$という値が得られるのであるから，x_tの測定値は式（6）より

$$(x_t)_{\mathrm{exp}}=(x_0)_{\mathrm{exp}}+F((x_0)_{\mathrm{exp}}-\langle X_0\rangle) \quad (16)$$

とするのが合理的である．

5　測定誤差$\epsilon(x_0)$が$\phi_0(x_0)$に依存しないという条件

この章では$\hat{x}_0$の測定誤差$\epsilon(x_0)$が対象粒子の初期波動関数$\phi_0(x_0)$に依存しないという条件から，線形性の仮説を導出する．

式（7），（15）より

$$(x_0)_{\mathrm{exp}}-x_0=-(x_0-\langle X_0\rangle)+G^{-1}(X_0-\langle X_0\rangle+G(x_0-\langle X_0\rangle-(X_0-\langle X_0\rangle))). \quad (17)$$

よって$(x_0)_{\mathrm{exp}}-x_0$は$x_0-\langle X_0\rangle$と$X_0-\langle X_0\rangle$の関数であることがわかる．上の式より$X_0=\langle X_0\rangle$のとき$(x_0)_{\mathrm{exp}}=x_0$であることがわかるから

$$(x_0)_{\mathrm{exp}}-x_0=B_1(X_0-\langle X_0\rangle)+B_2(X_0-\langle X_0\rangle)^2+\cdots \quad (18)$$

と展開できる．ここで B_k は $x_0 - \langle X_0 \rangle$ の関数である．従って $(x_0)_{\rm exp} - x_0$ は $X_0 - \langle X_0 \rangle$ の１次以上の項しか含まないことがわかる．従って C_k を $X_0 - \langle X_0 \rangle$ の関数として

$$\{(x_0)_{\rm exp} - x_0\}^2 = C_0 + C_1(x_0 - \langle X_0 \rangle) + C_2(x_0 - \langle X_0 \rangle)^2 + \cdots \tag{19}$$

と展開したとき， C_k は $X_0 - \langle X_0 \rangle$ の２次以上の項しか含まない．

x_0 の測定誤差 $\epsilon(x_0)$ の２乗は

$$\epsilon^2(x_0) = \int \{(x_0)_{\rm exp} - x_0\}^2 |\phi_0(x_0)|^2 |\xi_0(X_0)|^2 {\rm d}x_0 {\rm d}X_0 \tag{20}$$

で与えられる．Born の確率則によれば，誤差 0 で粒子の位置 $\hat{x}_0$ を測定したとき，その測定結果の確率密度は $|\phi_0(x_0)|^2$ に一致する．Born の確率則はその正しさが実験的に検証されているので，正しい量子測定理論は $\epsilon(x_0) = 0$ のとき Born の確率則を再現しなければならない．もしある測定理論で $\epsilon(x_0)$ が $\phi_0(x_0)$ に依存し，任意の $\phi_0(x_0)$ に対して $\epsilon(x_0) = 0$ となることができないときには，その理論は任意の $\phi_0(x_0)$ に対して Born の確率則を再現できないので，正しい測定理論とはいえない．

また測定誤差が対象粒子の波動関数 $\phi_0(x_0)$ に依存すれば，それは x_0 の平均値や標準偏差等の関数となる．本来測定対象の状態は未知であるから，多数回の位置測定を繰り返して x_0 の平均値や標準偏差等がわかるまで，測定誤差を知ることはできない．従って測定誤差はプローブと対象粒子との相互作用とプローブの初期状態 $|\xi_0\rangle$ のみによって決まり，対象粒子の初期波動関数 $\phi_0(x_0)$ には依存しないという条件を要請することは合理的である．

式（19）の右辺が x_0 の関数でなければ $\epsilon(x_0)$ は $\phi_0(x_0)$ に依存しない．従って $\{(x_0)_{\rm exp} - x_0\}^2$ が x_0 の関数ではないという条件を要請すると，式（19）において $C_k \equiv 0$ for $k \geq 1$ が成立しなければならない．しかしこの条件は強すぎて，正確には

$$\int C_k |\xi_0(X_0)|^2 {\rm d}X_0 = 0 \quad \text{for} \quad k \geq 1 \tag{21}$$

であれば $\epsilon(x_0)$ は $\phi_0(x_0)$ に依存しないことがわかる．

式（20）で誤差 $\epsilon(x_0)$ を定義しているが，３つの量 $\{(x_0)_{\rm exp} - x_0\}^2$，$|\phi_0(x_0)|^2$，$|\xi_0(X_0)|^2$ は，それぞれ独立している．式（19）の右辺は平均値 $\langle X_0 \rangle$ に依存しているが $|\xi_0(X_0)|^2$ の関数形には依存していない．すなわち $\langle X_0 \rangle$ を変えずに $|\xi_0(X_0)|^2$ の関数形を変えても，$\{(x_0)_{\rm exp} - x_0\}^2$，$|\phi_0(x_0)|^2$ は不変である．

条件（21）はある特定のプローブの確率密度関数 $|\xi_0(X_0)|^2$ に対して成立していればよい．しかし４章で測定値を定義したときの議論から明らかなように，$|\xi_0(X_0)|^2$ の標準偏差が 0 であれば測定誤差 $\epsilon(x_0)$ は 0 となり，一般には標準偏差が大きくなると誤差も大きくなる．すなわち誤差 $\epsilon(x_0)$ を変えるためには $|\xi_0(X_0)|^2$ の標準偏差を変える必要がある．このとき変化した $|\xi_0(X_0)|^2$ に対しても条件（21）は成立していなければならない．また式（17）の関数 $G(x)$（これを決めているのは対象とプローブの相互作用である）が具体的に決まらなければ，関数 $C_k(x)$ も具体的に決まらないので，どのような $|\xi_0(X_0)|^2$ が条件（21）を満足しているか明らかではない．実際にすべての C_k $(k \geq 1)$ に対して条件（21）を満た

6

す確率密度関数 $|\xi_0(X_0)|^2$ が存在するとは想像しがたい。従って前論文[2)] では任意の $|\xi_0(X_0)|^2$ に対して条件（21）が成立しなければならないと要請して $C_k \equiv 0 \quad \text{for} \quad k \geq 1$ を導出した.

ここではもう少し緩やかな条件から，同じ結論を導出できることを示す．たとえ具体的に条件（21）を満たす $|\xi_0(X_0)|^2$ の関数形がわかったとしても，実際にはプローブの確率密度関数を正確に制御できないので，実験において要請された関数形に確率密度関数を正確に設定することは難しい．従ってある特定の確率密度関数に対してだけでなく，それを少し変化させた確率密度関数 $|\xi_0(X_0)|^2 + \delta|\xi_0(X_0)|^2$ に対しても条件（21）が成立することを要請する：

$$\text{任意の } \delta|\xi_0(X_0)|^2 \text{ 対して} \int C_k(|\xi_0(X_0)|^2 + \delta|\xi_0(X_0)|^2)\mathrm{d}X_0 = 0 \quad \text{for} \quad k \geq 1. \quad (22)$$

条件（22）をみたす $C_k(x)$ は x の 1 次式でなければならないことが次の章で示される.[注3)] $C_k(x)$ は x の 2 次以上の項しか含まないので，$C_k(x) \equiv 0 \quad \text{for} \quad k \geq 1$ が成立する．すなわち式（19）の右辺は x_0 の関数でないことが導出された.
従って

$$\frac{\partial\{(x_0)_{\exp} - x_0\}}{\partial x_0} = 0.$$

従って上の式に式（14），（15）を代入して

$$\left(\left.\frac{\mathrm{d}G^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=X_t-\langle X_0\rangle} - \left.\frac{\mathrm{d}G^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=X_t-X_0} \right) \frac{\partial X_t}{\partial x_0} = 0.$$

ここで $\frac{\partial X_t}{\partial x_0} = 0$ のとき式（7）より X_t は X_0 のみの関数となり，X_t の値より $(x_0)_{\exp}$ の値を求めることができないので，$\frac{\partial X_t}{\partial x_0} \neq 0$ である．上の式の（　）の中が 0 となるのは，$G^{-1}(x) = g_0 + g_1 x$（g_0, g_1 は定数）のときのみである．ここで $\hat{U}$ が反転変換に対して不変であることを要請すると，$G(x)$ と $G^{-1}(x)$ は奇関数でなければならない．従って $g_0 = 0$.よって

$$G^{-1}(x) = g_1 x$$

となる.

従って $G(x) = x/g_1 \quad (g_1 \neq 0)$．ユニタリ性の条件（11）より $F(x) = f_1 x$（f_1 は定数）となる．従って式（6），（7）より線形性の仮説（1），（2）が導出されることがわかる.

7

6　$C_k(x)$がxの１次式になることの証明

X_0と$\langle X_0\rangle$の任意の関数$h(X_0,\langle X_0\rangle)$に対して

$$\int h(X_0,\langle X_0\rangle)|\xi_0(X_0)|^2\mathrm{d}X_0=0 \tag{23}$$

とする．$|\xi_0(X_0)|^2$を任意の微小量$\delta|\xi_0(X_0)|^2$だけ変化させた場合にも上の式が成立することを要請すると，このとき$|\xi_0(X_0)|^2$が変化すれば平均値$\langle X_0\rangle$も変化するので

$$\int h(X_0,\langle X_0\rangle+\delta\langle X_0\rangle)(|\xi_0(X_0)|^2+\delta|\xi_0(X_0)|^2)\mathrm{d}X_0=0. \tag{24}$$

ここで波動関数は１に規格化されていなければならないので

$$\int \delta|\xi_0(X_0)|^2\mathrm{d}X_0=0. \tag{25}$$

平均値の変化は

$$\delta\langle X_0\rangle=\int X_0\{|\xi_0(X_0)|^2+\delta|\xi_0(X_0)|^2\}\mathrm{d}X_0-\int X_0|\xi_0(X_0)|^2=\int X_0\delta|\xi_0(X_0)|^2\mathrm{d}X_0 \tag{26}$$

であり，X_0の関数でないことがわかる．

式（24）より

$$\int\left(\frac{\partial h}{\partial\langle X_0\rangle}\delta\langle X_0\rangle|\xi_0(X_0)|^2+h(X_0,\langle X_0\rangle)\delta|\xi_0(X_0)|^2\right)\mathrm{d}X_0=0.$$

$\int\frac{\partial h}{\partial\langle X_0\rangle}|\xi_0(X_0)|^2\mathrm{d}X_0=a$と置くと，$a$は$\langle X_0\rangle$の関数であるが$X_0$の関数ではない．式（26）を用いて

$$\int(aX_0+h(X_0,\langle X_0\rangle))\delta|\xi_0(X_0)|^2\mathrm{d}X_0=0.$$

$X_0\to\pm\infty$のとき$\delta|\xi_0(X_0)|^2\to 0$を満たす任意の$\delta|\xi_0(X_0)|^2$に対して

$$\int f(X_0)\delta|\xi_0(X_0)|^2\mathrm{d}X_0=0 \tag{27}$$

のとき，$f(X_0)=$定数となることを以下に示す．

積分範囲を$[c,d]$とする．勿論$X_0=c,d$で$\delta|\xi_0(X_0)|^2\simeq 0$である．この区間を$N-1$等分し，$X_1=c<X_2<\cdots<X_N=d$とする．それぞれの$X_n$での$\delta|\xi_0(X_0)|^2$の値をそれぞれ$\delta_n$とする．式（25）より

8

$$\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_N=0. \tag{28}$$

式（27）より

$f(X_1)\delta_1+f(X_2)\delta_2+\cdots+f(X_N)\delta_N=0.$

式（28）より$\delta_N=-(\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{N-1})$. これを上の式に代入して

$\{f(X_1)-f(X_N)\}\delta_1+\{f(X_2)-f(X_N)\}\delta_2+\cdots+\{f(X_{N-1})-f(X_N)\}\delta_{N-1}=0.$

$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{N-1}$ は任意に変えることができるから $f(X_1) = f(X_2) = \cdots = f(X_N)$. よって $f(x) =$ 定数である． QED.

よって，その定数を b として $h(X_0, \langle X_0 \rangle) + aX_0 = b$. 従って $h(X_0, \langle X_0 \rangle)$ は X_0 の 1 次式でなければならない． QED.

7　測定値の平均に対する条件

前論文[1)] では測定値 $(x_0)_{\exp}$ の平均が測定対象である x_0 の平均に等しいという要請から，線形性の仮説を導出することができるのではないかと予測していた．実際に導出できることを以下に示す．

測定値 $(x_0)_{\exp}$ の平均が測定対象である x_0 の平均に等しいという要請をすると

$$\int (x_0)_{\exp} |\phi_0(x_0)|^2 |\xi_0(X_0)|^2 \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}X_0 = \int x_0 |\phi_0(x_0)|^2 \mathrm{d}x_0. \tag{29}$$

ここで $\phi_0(x_0)$ は対象粒子の相互作用前の波動関数である．測定対象の状態は任意でなければならないから，任意の $\phi_0(x_0)$ に対して上の式が成立しなければならない．従って，すべての x_0 に対して

$$\langle (x_0)_{\exp} \rangle = x_0 \tag{30}$$

が成立しなければならない．

5 章で示したように，$(x_0)_{\exp} - x_0$ は $x_0 - \langle X_0 \rangle$ と $X_0 - \langle X_0 \rangle$ の関数であるから，$X_0 - \langle X_0 \rangle$ の関数 D_k を用いて

$$(x_0)_{\exp} - x_0 = D_0 + D_1(x_0 - \langle X_0 \rangle) + D_2(x_0 - \langle X_0 \rangle)^2 + \cdots$$

と展開できる．平均値に対する条件（30）に代入して

$$\int D_k |\xi_0(X_0)|^2 \mathrm{d}X_0 = 0 \quad \text{for} \quad k \geq 0 \tag{31}$$

が成立しなければならない．

5 章の条件式（21）の場合と同じ論理によって，$|\xi_0(X_0)|^2$ から少し変化した $|\xi_0(X_0)|^2 + \delta|\xi_0(X_0)|^2$ に対しても条件（31）が成立することを要請すると，5 章で示したように，$D_k(x)$ は x の 1 次式でなければならないから，$(x_0)_{\exp} - x_0$ は $X_0 - \langle X_0 \rangle$ の 1 次式でなければならない．このとき式（14），（15）より $G^{-1}(x)$ は x の一次式であるから，$G^{-1}(x) = h_1 x$（h_1 は定数）．よって $G(x) = g_1 x$（g_1 は定数）となる．ユニタリ性の条件（11）より $F(x) = f_1 x$（f_1 は定数）となるから，式（6），（7）より線形性の仮説（1），（2）が導出される．

8　まとめと考察

本論文では，相互作用後の粒子とプローブの位置演算子 $\hat{x}_t$，$\hat{X}_t$ が，相互作用前のそれらの位置演算子 $\hat{x}_0$，$\hat{X}_0$ の線形結合で与えられるという線形性の仮説の正当性を議論した．

本論文で考察している位置測定は，２章の冒頭に詳しく述べたが，対象粒子との相互作用の前にプローブの位置を測定しておいて，その相互作用の直後にプローブの位置を測定し，その測定値 X_t から対象の位置 $\hat{x}_0$ と $\hat{x}_t$ を測定するものである．このような位置測定では式（３）が理論の出発点であり，また式（３）が時間発展演算子 $\hat{U}$ を定義している．式（３）の関数 $f(x_0, X_0)$, $g(x_0, X_0)$ が決まれば，この量子測定理論における時間発展演算子 $\hat{U}$ は完全に決まる．ここで① $\hat{x}_0$ と $\hat{x}_t$ の測定結果は一意的に決定されなければならないという条件を用いている．またこの条件より，(x_0, X_0) と (x_t, X_t) は１対１に対応していることがわかる．

次に物理的に極めて当然な要請である②粒子とプローブの相互作用において全運動量は保存するという条件から，式（６），（７）を導出した．更に③ $\hat{U}$ がユニタリであるという条件から式（11）を導出した．

測定理論では測定値を適切に定義しなければならない．しかし現在の量子測定理論では，測定値に対する考察が不充分である．前論文[3)] で Ozawa の測定値の定義を批判したが，この分野のほとんどの理論家が，プローブの測定値 X_t を $\hat{x}_0$ の測定値とみなしている．更に奇妙なことに，$\hat{x}_0$ と $\hat{x}_t$ は一般には等しくならないのに，$\hat{x}_t$ の測定値も同じ X_t であるとみなしている．

誤差０のときには測定値 $(x_0)_{\mathrm{exp}}$，$(x_t)_{\mathrm{exp}}$ は測定対象である x_0 と x_t の値に一致しなければならない．一般にプローブの確率密度関数 $|\xi_0(X_0)|^2$ の標準偏差が０でないとき，得られた測定値 X_t が $\xi_0(X_0)$ のどの X_0 成分と相互作用したものなのか知ることができないために測定誤差が生じる．従って X_t の値からそれぞれの測定値を決めるためには，X_0 をその平均値 $\langle X_0 \rangle$ とみなすしかない．４章ではこのような考えから測定値（15），（16）を定義している．

測定誤差 $\epsilon(x_0)$ が対象粒子の波動関数 $\phi_0(x_0)$ に依存し，任意の $\phi_0(x_0)$ に対して $\epsilon(x_0) = 0$ となることができないときには，任意の $\phi_0(x_0)$ に対して Born の確率則を再現できない．また $\epsilon(x_0)$ が $\phi_0(x_0)$ に依存すれば，多数回の位置測定を繰り返して x_0 の平均値や標準偏差等がわかるまで，測定誤差 $\epsilon(x_0)$ を知ることはできない．従って④測定誤差 $\epsilon(x_0)$ は $\phi_0(x_0)$ に依存してはならないという条件を要請した．この条件から式（21）が導出された．更にある特定の確率密度関数 $|\xi_0(X_0)|^2$ に対してだけでなく，それを少し変化させた $|\xi_0(X_0)|^2 + \delta|\xi_0(X_0)|^2$ に対しても条件（21）が成立しなければならないという条件を加えることによって，$(x_0)_{\mathrm{exp}} - x_0$ が x_0 の関数でないことがわかり，線形性の仮説（１），（２）を導出することができた．

７章では条件④の代わりに，⑤測定値 $(x_0)_{\mathrm{exp}}$ の平均が x_0 の平均に等しいという条件を要請することによっても，線形性の仮説が導出できることを示した．ここでもまた式（31）

の条件がある特定の確率密度関数$|\xi_0(X_0)|^2$に対してだけでなく，それを少し変化させた$|\xi_0(X_0)|^2+\delta|\xi_0(X_0)|^2$に対しても成立することが必要であった．

誤差$\epsilon(x_0)$が0のときには，誤差の定義式（20）より明らかに$(x_0)_{\rm exp}=x_0$であるから，$(x_0)_{\rm exp}$の平均はx_0の平均に等しい．しかし$\epsilon(x_0)>0$のときにこれら２つの平均値が等しくなるというのは，それ程自明ではない．以下に２つの平均値が等しいと考えられる理由について述べる．

$\langle(x_0)_{\rm exp}\rangle\neq x_0$のとき$\langle(x_0)_{\rm exp}\rangle-x_0=\delta$（定数）として，新しい測定値を$(x_0)_{\rm exp}=(x_0)^{\rm old}_{\rm exp}-\delta$と定義すると，$\langle(x_0)_{\rm exp}\rangle=x_0$となる．またこのとき新しい測定誤差は$\epsilon^2(x_0)=(\epsilon(x_0)_{\rm old})^2-\delta^2$となるので，元の測定誤差より小さい．誤差が最小になるように測定値$(x_0)_{\rm exp}$を定義すべきであるから，$\langle(x_0)_{\rm exp}\rangle=x_0$でなければならない．

７章で述べたように，任意のx_0に対して$\langle(x_0)_{\rm exp}\rangle=x_0$が成立していれば，$(x_0)_{\rm exp}$の平均は$x_0$の平均に等しくなる．いま対象粒子が一つの$x_0$の値をもつ場合を考えると，$x_0$は$\hat{X}_t$の測定値$X_t$と$X_0$の値がわかれば，式（14）を用いて誤差0で求めることができる．実際には我々は得られたX_tが$\xi_0(X_0)$のどのX_0成分と相互作用したものなのか知ることができないので，X_0をその平均$\langle X_0\rangle$で置き換えたものを測定値$(x_0)_{\rm exp}$とした．X_tは測定値を用いてx_0をX_0の関数とみなすと，上の測定値の定義が正当化できるためには，$\xi_0(X_0)$がX_0の値をもつ確率密度$|\xi_0(X_0)|^2$を用いて，$\langle x_0\rangle=(x_0)_{\rm exp}$でなければならない．

上の議論ではx_0をX_0の関数とみなしていたが，$(x_0)_{\rm exp}$はX_tによって決まりX_tはX_0の関数であるので，$(x_0)_{\rm exp}$をX_0の関数とみなすこともできる．x_0の測定を繰り返せば，測定値X_tはそのときに関与したX_0の値が違うのでいろいろ変化し，測定値$(x_0)_{\rm exp}$も変化する．その平均$\langle(x_0)_{\rm exp}\rangle$が$x_0$と等しくなるように測定値を定義しなければならないと考えれば，$\langle(x_0)_{\rm exp}\rangle=x_0$でなければならない．

注

注１）このとき式（３）の右辺に位相因子$\exp(\mathrm{i}\delta)$がかかるが，これは問題を引き起こさない．

注２）$\hat{X}_t$の測定である測定値を得たとき，いずれかのX_0成分が選択されていることになる．

注３）式（22）の$C_k(x)$の$\langle X_0\rangle$は式（21）の$\langle X_0\rangle$とは少し変化している．式（24）を参照．

参考文献

１）小杉誠司「位置の測定装置における時間発展演算子」『淑徳短期大学紀要』第49号，2010，p.1-11.

２）S. Kosugi, Prog. Theor. Phys. 123, 2010, p.431-448.

３）小杉誠司「Heisenberg の不確定性原理における位置測定の誤差」『淑徳短期大学紀要』第48号，2009，p.155-166.

４）小杉誠司「Heisenberg の不確定性原理における位置の測定値の不確定性」『淑徳短期大学紀要』第50号，2011，p.145-158.