淑徳短期大学研究紀要第52号（2013.2）

自由粒子の移動距離の測定における標準量子限界

小　杉　誠　司

（2012年９月16日受理）

要　約

自由粒子の位置をモニターする際に，その測定精度が量子論によってどのように制限されるかについて考察した．この問題の過去の論争を概観し，それぞれの主張の意義と問題点を明らかにした．時間間隔 τ の２つの位置測定によって，この間の自由粒子の移動距離を測定したとき，その測定値の不確定性を $\sqrt{\hbar\tau/m}$ より小さくすることはできない．

本論文で考察したのは，次の位置測定である：測定前にプローブをある所定の位置に設定しておく．対象粒子とプローブが相互作用した直後にプローブの位置を測定し，その測定値を用いて粒子の測定前と測定後の位置を測定する．このような位置測定に対して，上で定式化した標準量子限界が常に成立することを証明した．

キーワード　位置測定，測定誤差，不確定性関係，収縮状態，SQL

1　はじめに

一般相対性理論においてその存在が予言されている重力波は，いまだに直接測定されていない．重力波は非常に微弱であるので，例えば電子に重力波が作用したときに生じる電子の位置の変化を測定することによって，重力波を検出しようとしたとき，量子力学的な制限が存在するかどうかが問題となる．Heisenbergの γ 線顕微鏡の思考実験に見られるように，電子の位置を小さい誤差で測定すると電子の位置をより正確に測定できるが，その測定が電子に与える運動量の擾乱が大きくなるために，その後の波束の拡散が大きくなり，２回目の位置の測定値に対する不確定性が大きくなってしまう．従って量子力学では不確定性原理に 1
よって，時間間隔 τ の間に移動した電子の移動距離を正確に求めることができないことが容易に予測される．

Braginsky とVorontsovは次のような考察から位置測定の標準量子限界（Standard Quantum Limit，SQL）を導出した．[1] $t=0$ での位置 $\hat{x}_0$ と運動量 $\hat{p}_0$ の不確定性をそれぞれ $\Delta x(0)$, $\Delta p(0)$ とすると，不確定性原理により

$$\Delta x(0)\Delta p(0) \geq \hbar/2 \tag{1}$$

が成立する．従って自由粒子の $t=\tau$ における位置の不確定性 $\Delta x(\tau)$ の２乗は，τ 秒間における $\Delta p(0)$ による自由粒子の波束の拡散を考慮して

$$\Delta x(\tau)^2 = \Delta x(0)^2 + \Delta p(0)^2(\frac{\tau}{m})^2 \geq 2\sqrt{\Delta x(0)^2\Delta p(0)^2(\frac{\tau}{m})^2} = \frac{\hbar\tau}{m} \tag{2}$$

となる．従って２回目の位置の測定値に対する不確定性は

$$(\Delta x)_{\mathrm{SQL}} = \sqrt{\frac{\hbar\tau}{m}} \tag{3}$$

より小さくすることはできない．$(\Delta x)_{\mathrm{SQL}}$ を自由粒子の位置をモニターするときの標準量子限界と呼んでいる．

2　Yuenの収縮状態

Yuenは１章で述べたBraginskyとVorontsovの SQL の導出には欠陥があると批判した.[2] Heisenberg描像では時刻 τ での位置演算子は $\hat{x}_\tau = \hat{x}_0 + \hat{p}_0\tau/m$ で与えられるので，$\hat{x}_\tau$ の標準偏差の２乗は

$$\Delta x(\tau)^2 = \Delta x(0)^2 + \Delta p(0)^2(\frac{\tau}{m})^2 + (\langle \hat{x}_0\hat{p}_0 + \hat{p}_0\hat{x}_0\rangle - 2\langle \hat{x}_0\rangle\langle \hat{p}_0\rangle)\frac{\tau}{m} \tag{4}$$

となる．式（2）と（4）を比較してわかるように，BraginskyとVorontsovの SQL の導出では，式（4）の右辺の第３項が０あるいは正であることを暗黙のうちに仮定している．

Yuenは次のような収縮状態（contractive state）$|\mu,\nu,\alpha,\omega\rangle$ を考えた.[2] ここで μ,ν,α は複素数のパラメータ，ω は実数のパラメータである．収縮状態の波動関数は

$$\langle x|\mu,\nu,\alpha,\omega\rangle = N\exp\{-\frac{m\omega}{2\hbar}\frac{1+2\mathrm{i}\xi}{|\mu-\nu|^2}(x-\langle x\rangle)^2 + \mathrm{i}\langle p\rangle(x-\langle x\rangle)\} \tag{5}$$

で与えられる．ここで N は規格化の因子，

2 $$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\langle x\rangle + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\langle p\rangle, \quad \xi = \mathrm{Im}(\mu^*\nu), \quad |\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$$

である．また $\langle x\rangle$，$\langle p\rangle$ は，それぞれ位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の平均である．$\xi > 0$ である状態を収縮状態と呼んでいる．この波動関数はよく知られているGauss型の波束の形をしているが，通常の波束の位置の拡がりパラメータが実数であるのに対して，収縮状態のそれは複素数になっていることがわかる．このため通常のGauss型の波束は位置の不確定性

Δx が時間とともに大きくなるが，収縮状態の場合には

$$\frac{m}{2\hbar}\Delta x^2(t) = \eta\omega t^2 - \xi t + \zeta/\omega, \tag{6}$$

$$\text{ここで}\quad \eta = \frac{(1+4\xi^2)}{4|\mu-\nu|^2}, \quad \zeta = |\mu-\nu|^2/4$$

となり，図 1 に示すように t が $0 \sim t_m = \xi/2\eta\omega$ の間で $\Delta x^2(t)$ は減少している．従って測定対象の粒子が位置測定の後に収縮状態に移行すれば，SQL を破ることができるとYuenは主張した．実際に，$\xi > 0$ のとき SQL を破る時刻が必ず存在することを容易に示すことができる．

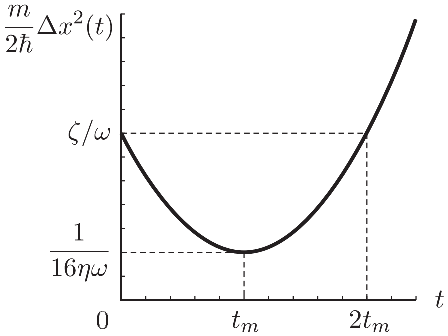

図１：収縮状態にある波束の不確定性 Δx の時間変化

Yuenの論文が発表されてから，自由粒子の位置測定に対する SQL の存在をめぐって論争が続いた．[3)−8)]

3　CavesのSQLの擁護

Yuenの批判を受けて，Cavesは SQL の成立を支持する立場から論文を書いた．[6)] 式（4）の $\Delta x(t)$ は対象粒子の波動関数の拡がりを示しているが，測定過程では測定誤差も測定値の不確定性の原因となる．測定誤差まで含めてこの問題を議論したのがCavesである．Cavesは次のvon Neumann型の対象粒子とプローブの相互作用[9)]を用いて，SQL が成立していることを具体的に示した：

$$H = K\hat{x}_0\hat{P}_0. \tag{7}$$

ここで K は結合定数であり，$\hat{P}_0$ は相互作用前のプローブの運動量である．Cavesは測定誤差のことを分解能（resolusion）と呼び σ で表したが，Ozawaも指摘しているように，Cavesの分解能の定義は曖昧な点を含んでいる．[8)] 前論文[10)]で指摘したように，測定誤差には次の２種類がある：測定前の粒子の位置 $\hat{x}_0$ に対する測定値の誤差 $\epsilon(x_0)$ と，測定後の粒子の位

置 $\hat{x}_t$ に対する測定値の誤差 $\epsilon(x_t)$ である．これら２つの測定誤差は違うものであるが，Cavesはこの２つを明確に区別していない．Cavesが用いたvon Neumann型の相互作用（7）の場合には，たまたま $\epsilon(x_0)$ と $\epsilon(x_t)$ が一致するので，Cavesはこの２つの誤差を区別しなかったと推測できるが，このことがCavesの論文の理解を妨げている．

Cavesによれば，２回目の位置測定の結果の不確定性 Δ_2 の２乗は

$$\Delta_2^2 = \sigma^2 + \Delta x(\tau)^2 \tag{8}$$

で与えられる．ここで

$$\sigma \geq \Delta x(0) \tag{9}$$

を仮定すると，

$$\Delta_2^2 \geq \Delta x(0)^2 + \Delta x(\tau)^2 \geq 2\Delta x(0)\Delta x(\tau) \geq |\langle[\hat{x}_0, \hat{x}_\tau]\rangle| \geq \hbar\tau/m \tag{10}$$

となり，SQL が成立していることが証明される．ここで任意の２つのオブザーバブル $\hat{A}$，$\hat{B}$ に対して，次の不等式が常に成立することを用いた[11)]：

$$\Delta(A)\Delta(B) \geq \frac{1}{2}|\langle|[\ \hat{A},\ \hat{B}\ ]|\rangle|. \tag{11}$$

ここで $|\rangle$ は対象粒子のヒルベルト空間の任意のベクトルであり，$\Delta(A)$ と $\Delta(B)$ は，それぞれ演算子 $\hat{A}$，$\hat{B}$ の標準偏差である．

しかしvon Neumann型の相互作用（7）を用いたときには不等式（9）は成立しているが，不等式（9）が一般に成立することをCavesは証明していない．

$\Delta x(\tau)$ は１回目の位置測定の誤差に依存しているが，２回目の位置測定の誤差とは無関係である．従って非常に大きい誤差 $\sigma_1 \gg (\hbar\tau/m)^{1/2}$ で１回目の位置測定をおこない，その後対象粒子を収縮状態にして $\Delta x(\tau) \ll (\hbar\tau/m)^{1/2}$ となるようにする．その後２回目の位置測定を非常に小さい測定誤差 $\sigma_2 \ll (\hbar\tau/m)^{1/2}$ でおこなえば，$\Delta_2^2 = \sigma_2^2 + \Delta x(\tau)^2 \ll \hbar\tau/m$ とできて，SQL を破ることができるはずである．

このような議論を踏まえて，Cavesは位置測定の SQL を次のように再定式化した：質量 m の自由粒子に対して時間間隔 τ で，同じ測定装置を用いて２回位置測定をおこなったとき，２回目の位置測定の結果を $\sqrt{\hbar\tau/m}$ より小さい不確定性で測定することはできない．また最初の位置測定の結果は一般に一意的ではなく，いろいろな値をとるので，その値について平均化した Δ_2 を用いなければならない．

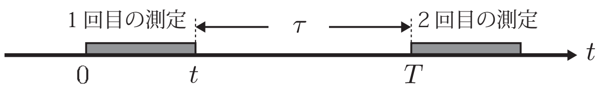

図２：２つの位置測定の時刻

時間間隔 $(0,t)$ で最初の位置測定をおこない，$t=T$ で２回目の位置測定を始めたとすると，Cavesの SQL の定義は

$$\int \Delta_{2,X}^2 P(X)dX \geq \hbar\tau/m, \tag{12}$$

$$\Delta_{2,X}^2 = \epsilon(x_T)^2 + \Delta x_X(T)^2 \tag{13}$$

となる．ここで $\tau = T - t$，$P(X)$ は最初の位置測定でプローブの位置 $\hat{X}_t$ の読み取り値が X である確率密度関数である．物理量 $\Delta_{2,X}$，$\Delta x_X(T)$ に付いている添え字 X は，$\hat{X}_t$ の読み取り値が X であるときのそれぞれの物理量を表している．誤差 $\epsilon(x_T)$ は２回目の位置測定の誤差であるので，実際には２回目のプローブの読み取り値に依存しているが，Cavesはこの誤差の X 依存性を考慮していない．

Cavesは粒子とプローブが相互作用する時間間隔をあらわに表記していないが，式（８），（９）の σ は式 (13) の $\epsilon(x_T)$ を表していることは明らかである．しかし６章で示すように，１回目の位置測定の直後の自由粒子の位置の標準偏差（式（９）の $\Delta x(0)$）と関連しているのは，測定誤差 $\epsilon(x_T)$（これは Caves が用いた相互作用の場合には $\epsilon(x_0)$ に等しい）ではなく，測定誤差 $\epsilon(x_t)$ である．このようにCavesは２つの測定誤差を明確に区別して議論していない．

本章で述べたようにCavesは SQL の成立を正当化しようとしているが，SQL が常に成立するという証明を与えているわけではない．

4　SQLを破るOzawaの位置測定

Ozawaは次のような粒子とプローブの相互作用を用いて，Cavesによって定式化された SQL を破る位置測定があることを示した[8)]：

$$\hat{H} = \frac{K\pi}{3\sqrt{3}}(2\hat{x}_0\hat{P}_0 - 2\hat{p}_0\hat{X}_0 + \hat{x}_0\hat{p}_0 - \hat{X}_0\hat{P}_0). \tag{14}$$

ここで $\hat{X}_0$，$\hat{P}_0$ は，それぞれ測定前のプローブの位置演算子，運動量演算子である．対象粒子とプローブの自由ハミルトニアンを無視する近似をおこない，Heisenbergの運動方程式を解くと，

$$\hat{x}_t = \hat{x}_0 - \hat{X}_0, \quad \hat{X}_t = \hat{x}_0 \tag{15}$$

5

を得るので，測定前の粒子の位置 $\hat{x}_0$ の測定誤差 $\epsilon(x_0)$ は，粒子の任意の初期状態 $|\phi_0\rangle$ に対して０となる．Cavesの SQL の定義では，同じ測定装置を用いて２つの位置測定をおこなう必要があるから，$\epsilon(x_T) = \epsilon(x_0)$ である．更にOzawaの相互作用を用いた場合には，測定後の波動関数は

$$\langle x, X|\hat{U}|\phi_0, \xi_0\rangle = \phi_0(X)\xi_0(X - x)$$

であるので[注1)]，プローブの初期状態の状態ベクトル $|\xi_0\rangle$ をYuenの収縮状態 $|\mu, \nu, 0, \omega\rangle$ にとると，測定後の粒子の波動関数は $\langle X - x|\mu, \nu, 0, \omega\rangle = \langle x|\mu, \nu, X, \omega\rangle$ に変化する．ここで X は $\hat{X}_t$ の読み取り値である．このようにOzawaの位置測定は，Yuenが提案した方法で SQL を破っていることがわかる．

Yuenの論文が発表されてから５年間，位置測定の SQL の存在をめぐって論争が続いていたが，Maddoxが調停をおこないOzawaのほうに軍配をあげた．[12)] それ以来，位置測定の SQL は存在しないということが学会の定説になっている．

しかしOzawaの議論には２，３の問題点がある．最初に，このことは既に前論文[13)] において指摘していることであるが，Ozawaが用いた相互作用（14）は運動量を保存しない．このことは，相互作用後の粒子とプローブの運動量がそれぞれ $\hat{p}_t = -\hat{P}_0$，$\hat{P}_t = \hat{p}_0 + \hat{P}_0$ であることから明らかである．最初の位置測定が粒子に与える運動量の擾乱は，その後の粒子の位置のゆらぎ $\Delta x(T)$ に影響を与えるから，運動量を保存しない相互作用を用いた位置測定の結果の妥当性に疑問が生じる．（ついでに述べると，Cavesが用いた相互作用（７）も運動量を保存していない．）

さらにOzawaは任意の $|\phi_0\rangle$ に対して読み取り値 X の平均が粒子の測定前の位置の平均に等しいことと，読み取り値 X が測定後の粒子の位置の平均に等しいことを仮定して議論をおこなっている：

$$\langle \phi_0, \xi_0|\hat{X}_t|\phi_0, \xi_0\rangle = \langle \phi_0|\hat{x}_0|\phi_0\rangle, \tag{16}$$
$$X = \langle \phi_X|\hat{x}_0|\phi_X\rangle. \tag{17}$$

ここで $|\phi_X\rangle$ は読み取り値が X であるときの測定後の粒子の状態ベクトルである．Ozawaが用いた相互作用（14）の場合には，測定前の位置 $\hat{x}_0$ の測定値を与える演算子 $(\hat{x}_0)_{\mathrm{exp}}$ は $\hat{X}_t$ であるので，式（16）は $\hat{x}_0$ の測定値の平均が $\hat{x}_0$ の平均に等しいことを示しているので，妥当な仮定である．[注2)] 実際に，式（15）より $\hat{X}_t = \hat{x}_0$ であるから，仮定（16）は明らかに成立している．しかし式（17）の右辺は，Ozawaが用いた相互作用に対して $X - \langle\hat{X}_0\rangle$ となるので，式（17）が成立するためには $\langle\hat{X}_0\rangle = 0$ でなければならない．実際にOzawaは $\langle\hat{X}_0\rangle = 0$ となるプローブの状態ベクトル $|\xi_0\rangle$ を用いている．しかし，このことは $\langle\hat{X}_0\rangle = 0$ となる観測者に対してのみ式（17）が成立することを意味しているのでおかしい．[注3)] 一般に式（17）は成立しない．

更にOzawaが SQL を破っている位置測定があると主張したとき，その SQL はCavesが定式化した SQL であった．次の章で明らかになるように，Cavesが定式化した SQL は自由粒子の位置をモニターするときの SQL として適切ではない．

Cavesの SQL を破る位置測定として，筆者は次の相互作用を用いた位置測定を提案したい：

$$\hat{H} = K(\hat{p}_0 + \hat{P}_0)(\hat{X}_0 - \hat{x}_0). \tag{18}$$

この相互作用に対して，式（14）の場合と同様にして Heisenberg の運動方程式を解くと，

$$\hat{p}_t = (1+g_0)\hat{p}_0 + g_0\hat{P}_0, \quad \hat{P}_t = -g_0\hat{p}_0 + (1-g_0)\hat{P}_0 \tag{19}$$

を得るので，$\hat{p}_t + \hat{P}_t = \hat{p}_0 + \hat{P}_0$ となり，明らかに運動量を保存している．ここで $g_0 \equiv Kt$ である．また

$$\hat{x}_t = (1-g_0)\hat{x}_0 + g_0\hat{X}_0, \quad \hat{X}_t = -g_0\hat{x}_0 + (1+g_0)\hat{X}_0 \tag{20}$$

を得るので，$g_0 = -1$ のとき $\hat{X}_t = \hat{x}_0$ となり，任意の $|\phi_0\rangle$ に対して $\epsilon(x_0) = 0$ を得る．この相互作用の場合には，最初の位置測定の直後に波動関数は

$$\langle x, X|\hat{U}|\phi_0, \xi_0\rangle = \phi_0(X)\xi_0(-x+2X)$$

となるので，プローブの初期状態 $|\xi_0\rangle$ を収縮状態 $|\mu, \nu, \langle\hat{X}_0\rangle, \omega\rangle$ にとると，最初の位置測定の直後の粒子の波動関数は $\langle 2X - x|\mu, \nu, \langle\hat{X}_0\rangle, \omega\rangle = \langle x|\mu, \nu, X - \langle\hat{X}_0\rangle, \omega\rangle$ に移行する．従ってこの位置測定はCavesが定式化した SQL を破ることができる．この議論では Ozawaの仮定（16），（17）を必要としていないので，この位置測定はOzawaの位置測定が持っている疑問点を持たない．[注4)]

Cavesが用いたvon Neumann型の相互作用（7）の場合も，測定誤差 $\epsilon(x_0) = 0$ とすることが可能である．しかしこの相互作用の場合 $\epsilon(x_0) = \epsilon(x_t)$ であるので，$\epsilon(x_0) = 0$ のとき $\epsilon(x_t) = 0$ となる．このとき最初の位置測定の後の粒子の位置のゆらぎは $\Delta x_X(t) = 0$ となる．[注5)] $\Delta x_X(t) = 0$ である収縮状態は存在しないので，von Neumann型の相互作用で $\epsilon(x_0) = 0$ の場合には，測定後に粒子は収縮状態に移行することはできない．それに対して Ozawaが用いた相互作用（14）や筆者が提案した相互作用（18）の場合には，$\epsilon(x_0) = 0$ の場合でも $\epsilon(x_t) > 0$ となることができるので，測定後に粒子は収縮状態に移行することができる．

5　自由粒子の移動距離に対するSQL

これまでの議論はCavesが定式化した SQL の式（12）に基づいている．ここで自由粒子の位置測定の SQL は元々何を意味していたかについて吟味したい．Braginsky と Vorontsov は，自由粒子に一定の力 F が τ 秒間働いていたときに，その力 F を検出する精度を求める過程で，位置測定の SQL を初めて導入した．[1)] よく知られているように，自由粒子に一定の力 F が τ 秒間働いたとき，働かない場合と比較して，粒子の位置は $\delta x = F\tau^2/2m$ だけ変化する．このことから彼らは力 F の SQL を，位置測定の SQL である $(\Delta x)_{\mathrm{SQL}}$ を用いて，$2m(\Delta x)_{\mathrm{SQL}}/\tau^2$ と定義した．この議論では明らかに δx は τ 秒間の粒子の移動距離の違いであるから，$(\Delta x)_{\mathrm{SQL}}$ は粒子の移動距離を 2 回の位置測定で測定した結果の標準量子 7

限界である．Caves等も上と同じ議論を別の論文[14]で展開している．更にBraginskyとKhaliliは粒子の運動量測定における標準量子限界である $(\Delta P)_{\mathrm{SQL}}$ を用いて，粒子に加わる力の測定に対する標準量子限界である $(\Delta F)_{\mathrm{SQL}}$ を導出している．[15] その導出において $(\Delta P)_{\mathrm{SQL}}$ は，２回の位置測定の結果である x_1，x_2 を用いて得られる自由粒子の運動量 $m(x_2 - x_1)/\tau$ の測定値に対する不確定性として考えられている．このように位置の SQL が粒子の移動距離の不確定性に対するものであるならば，それは最初の位置測定の結果に対する不確定性も含まなければならない．

しかし他方で，同じ論文の中でBraginskyとVorontsovは $(\Delta x)_{\mathrm{SQL}}$ を２回目の位置測定の結果に対する不確定性であると明確にかいている．[1] しかし彼等は τ 秒間に２回の位置測定をおこない，自由粒子が移動した距離を測定することによって，その間に自由粒子に重力波が作用したかどうかを判定しようとしているのであるから，$(\Delta x)_{\mathrm{SQL}}$ を２回目の位置測定の結果に対する不確定性と考えることはできない．そして彼等のこの間違いがCavesの SQL の定式化に引き継がれていったと筆者は考える．彼等はYuenと同様に測定誤差を考慮していないので，これは式（2）の $\Delta x(\tau)$ のことを指している．Cavesはこのことを踏まえて SQL を式（12）のように定式化したわけであるが，それはいささか煩雑ですっきりしない．２回目の測定結果の不確定性だけを考慮して SQL を定義しているので，何故位置測定を２回するのか明確ではない．１回目の測定は２回目の位置測定の準備過程として捉えられていて，SQL を成立させるために２回目の位置測定は１回目と同じ測定装置を用いておこなう必要があるという付加条件を付けていた．また２回目の測定値の不確定性 Δ_2 に対して，最初の位置測定の読み取り値 X について平均化したものを用いなければならないといった付加条件も付いていて，すっきりしない．これらの付加条件を必要としたのは，Cavesの SQL の定義が適切でなかったからであると筆者は考える．

以上の議論を踏まえて，筆者は位置測定の SQL に対する次の定式化を提案したい：質量 m の自由粒子の τ 秒間における移動距離を $\sqrt{\hbar\tau/m}$ より小さい不確定性で測定することはできない．

この SQL では，２つの位置測定を同じ測定装置でおこなう必要はない．また式（12）のように最初の位置測定の読み取り値 X についての平均操作も不要である．Cavesの SQL は最初の位置測定の測定誤差 $\epsilon(x_t)$ を含んでいないが，筆者の SQL はそれを含まなければならない：

8

$$\Delta_X^2 = \epsilon_X(x_t)^2 + \Delta_{2,X}^2 \geq \hbar\tau/m. \tag{21}$$

ここで $\Delta_{2,X}$ は２回目の位置測定の結果に対する不確定性であり，CavesやOzawaが用いた相互作用（7），（14）に対しては

$$\Delta_{2,X}^2 = \epsilon_{X'}(x_T)^2 + \Delta x_X(T)^2 \tag{22}$$

となる．ここで X' は２回目の位置測定におけるプローブの位置演算子の読み取り値である．

一般に，対象粒子の任意の初期状態 $|\phi_0\rangle$ に対して，対象粒子の測定前の位置 $\hat{x}_0$ の平均がその測定値 $(x_0)_{\rm exp}$ の平均に等しいとき，すなわち

$$\langle\phi_0,\xi_0|(\hat{x}_0)_{\rm exp}|\phi_0,\xi_0\rangle = \langle\phi_0|\hat{x}_0|\phi_0\rangle \tag{23}$$

が成立するとき，式（22）は成立する．ここで $(\hat{x}_0)_{\rm exp}$ は測定値 $(x_0)_{\rm exp}$ を与える演算子である．式（23）の成立はそれ程自明ではない．しかし次の章で明らかになるように，新しい測定値演算子を

$$\begin{aligned}(\hat{x}_0)^{\rm new}_{\rm exp} &= (\hat{x}_0)_{\rm exp} - \Delta, \\ \Delta &\equiv \langle\phi_0,\xi_0|(\hat{x}_0)_{\rm exp}|\phi_0,\xi_0\rangle - \langle\phi_0|\hat{x}_0|\phi_0\rangle\end{aligned}$$

と定義して，測定値を較正（calibration）し，新しい測定値 $(\hat{x}_0)^{\rm new}_{\rm exp}$ に対して式（23）が常に成立するようにできなければ，それは正しい測定値ではない．従って（22）が常に成立すると考えてよい．このとき

$$\Delta_{2,X} \geq \Delta x_X(T). \tag{24}$$

従って，もし

$$\epsilon_X(x_t) \geq \Delta x_X(t) \tag{25}$$

が成立するならば，そのとき

$$\Delta_X^2 \geq \epsilon_X(x_t)^2 + \Delta x_X(T)^2 \geq \Delta x_X(t)^2 + \Delta x_X(T)^2 \geq |\langle[\hat{x}_t,\hat{x}_T]\rangle| \geq \hbar\tau/m \tag{26}$$

となり，粒子が最初の位置測定の後に収縮状態に移行したとしても，SQL（21）は常に成立する．ここで不等式（11）を用いた．収縮状態に対して成立する式（6）を用いて，

$$\Delta x_X(t)^2 + \Delta x_X(T)^2 \geq \hbar\tau/m$$

が成立することを直接確かめることもできる．

4 章で議論したOzawaの位置測定と筆者の位置測定の両方の場合において，$\epsilon_X(x_t) = \Delta X(0)$ となる．ここで $\Delta X(0)$ は $t=0$ でのプローブの位置の標準偏差である．（両者とも $\epsilon_X(x_t)$ の X 依存性はない．）また両者とも測定後に粒子はプローブの初期状態である収縮状態に移行するから $\Delta x_X(t) = \Delta X(0)$, よって $\epsilon_X(x_t) = \Delta x_X(t)$ となり，不等式（25）は成立している．従って両者ともCavesのSQL（12）を破っていたが，筆者のSQL（21）は破られていない． 9

6　式（23）の導出

$\langle\phi_0,\xi_0|(\hat{x}_0)_{\rm exp}|\phi_0,\xi_0\rangle - \langle\phi_0|\hat{x}_0|\phi_0\rangle \equiv \Delta$ が 0 でない場合を考える．簡単のために $\Delta x(0) = 0$ とする．このとき測定誤差の 2 乗は

$$\epsilon^2(x_0) = \langle\phi_0,\xi_0|\{(\hat{x}_0)_{\mathrm{exp}} - \hat{x}_0\}^2|\phi_0,\xi_0\rangle = \Delta^2(x_0)_{\mathrm{exp}} + \Delta^2$$

となるので，測定誤差は測定値の標準偏差 $\Delta(x_0)_{\mathrm{exp}}$ に一致しないで，それよりも大きくなってしまう．図 3 を見てわかるように，このとき測定値 $(x_0)_{\mathrm{exp}}$ の分布が真の値 $\langle\hat{x}_0\rangle$ から Δ だけずれていることがわかる．このとき明らかに測定値 $(x_0)_{\mathrm{exp}}$ は正しい測定値になっていない。正しい測定値を得るためには，このずれが 0 になるように較正しなければならない．

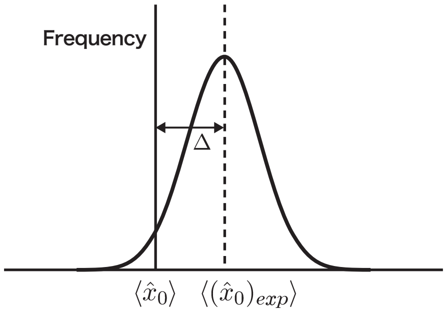

図 3 ：測定値の分布と系統誤差 Δ

このとき新しい測定値演算子 $(\hat{x}_0)^{\mathrm{new}}_{\mathrm{exp}}$ を

$$(\hat{x}_0)^{\mathrm{new}}_{\mathrm{exp}} = (\hat{x}_0)_{\mathrm{exp}} - \Delta \tag{27}$$

と定義すると式（23）が成立し，系統誤差 Δ を取り除き，測定ごとにばらつく偶然誤差だけにすることができる．すなわち

$$\epsilon(x_0) = \Delta(x_0)_{\mathrm{exp}}$$

となる．

これまでは $\Delta x(0) = 0$ の場合を考えたが，$\Delta x(0) > 0$ である一般の場合にも同様の議論をすることができる．すなわち，この場合も式（27）のように新しい測定値演算子 $(\hat{x}_0)^{\mathrm{new}}_{\mathrm{exp}}$ を定義すれば，式（23）が常に成立する．しかし Δ が $|\phi_0\rangle$ に依存していると，$|\phi_0\rangle$ によって較正値 Δ を変えなければならない．実際の測定では $|\phi_0\rangle$ はわからないから，もし Δ が $|\phi_0\rangle$ に依存してしまうと，測定値を較正することができない．従って任意の $|\phi_0\rangle$ に対して Δ は不変でなければならない．この条件を求めると，

10

$$\langle\xi_0|\{(\hat{x}_0)^{\mathrm{new}}_{\mathrm{exp}} - \hat{x}_0\}|\xi_0\rangle = 0 \tag{28}$$

となる．この条件は任意の $|\phi_0\rangle$ に対して式（23）が成立する条件と同じである．

式（28）は対象粒子とプローブの相互作用とプローブの初期状態 $|\xi_0\rangle$ に依存しているので，式（28）が常に成立するわけではない．対象粒子と不適切な相互作用をするプローブを選択したとき，あるいは $|\xi_0\rangle$ の選択がまちがっているとき，式（28）は成立しない．しかし

この章で明らかにしたように，式（28）を満たすように測定値 $(\hat{x}_0)_{\rm exp}$ を定義することができないとき，その測定装置は正しい測定をおこなっていない．実際に式（28）を満たす相互作用が存在するのであろうか？ 前論文[10, 16]で明らかにしたように，相互作用後の位置演算子 $\hat{x}_t$ と $\hat{X}_t$ が測定前のこれらの位置演算子 $\hat{x}_0$ と $\hat{X}_0$ の線形結合で与えられるとき，任意のプローブの初期状態 $|\xi_0\rangle$ に対して式（28）が成立している．従って式（28）を満たす相互作用が少なくとも一つ存在している．

7　SQL（21）が成立することの証明

ここで次のような位置測定に対して，不等式（25）が常に成立し，従って SQL（21）が常に成立していることを証明する：プローブは測定前に，小さな位置のゆらぎ $\Delta X(0)$ をもって所定の位置 $\langle\hat{X}_0\rangle$ に設定されている．測定対象の粒子とプローブが相互作用した直後に，プローブの位置 $\hat{X}_t$ を別の測定装置で測定誤差 0 で測定し，測定値 X を得る．この読み取り値を用いて対象粒子の測定前の位置 $\hat{x}_0$ と測定後の位置 $\hat{x}_t$ を一意的に決定する．

相互作用後の対象粒子とプローブの系の波動関数 $\langle x, X|\hat{U}|\phi_0, \xi_0\rangle$ を用いると，$\hat{X}_t$ の読み取り値が X であるときの測定直後の粒子の波動関数は

$$\langle x|\phi_X\rangle = \langle x, X|\hat{U}|\phi_0, \xi_0\rangle/\sqrt{P(X)}, \tag{29}$$

$$P(X) = \int |\langle x, X|\hat{U}|\phi_0, \xi_0\rangle|^2 dx \tag{30}$$

で与えられる．従って，このときの粒子の位置の標準偏差の 2 乗は

$$\Delta x_X(t)^2 = \int (x - \langle\hat{x}\rangle_X)^2 |\langle x|\phi_X\rangle|^2 dx, \tag{31}$$

$$\langle\hat{x}\rangle_X = \int x|\langle x|\phi_X\rangle|^2 dx \tag{32}$$

である．

測定直後に $\hat{x}_t$ と $\hat{X}_t$ を測定して，それぞれ測定値 x，X を得る確率密度は $|\langle x, X|\hat{U}|\phi_0, \xi_0\rangle|^2$ であるから，$\hat{x}_t$ の測定誤差 $\epsilon(x_t)$ の 2 乗は

$$\epsilon(x_t)^2 = \int \{(x_t)_{\rm exp} - x\}^2 |\langle x, X|\hat{U}|\phi_0, \xi_0\rangle|^2 dx dX \tag{33}$$

で与えられる．ここで $(x_t)_{\rm exp}$ は $\hat{x}_t$ の測定値であり，X のみの関数である．こうして読み取り値が X であるときの測定誤差 $\epsilon(x_t)$ の 2 乗は

$$\epsilon_X(x_t)^2 = \int \{(x_t)_{\rm exp} - x\}^2 |\langle x|\phi_X\rangle|^2 dx \tag{34}$$

となる．$(x_t)_{\rm exp}$ は X と $\langle\hat{X}_0\rangle$ の関数であって x の関数ではないから，

$$\epsilon_X(x_t)^2 = \Delta x_X(t)^2 + (\langle\hat{x}\rangle_X - (x_t)_{\rm exp})^2 \geq \Delta x_X(t)^2. \tag{35}$$

従って，不等式（25）は常に成立している．よって筆者の SQL（21）は，この章の最初に述べた位置測定に対して常に成立している．

8　まとめと考察

Braginsky と Vorontsov によって導入された自由粒子の位置をモニターするときの標準量子限界が実際に存在するかどうかについて，長い間論争が続いた．筆者の考えでは，第５章で論じたように，この SQL はその導入の経緯を考えれば，式（21）で与えられるように定式化されなければならない．しかし彼等は測定誤差を無視し式（22）の $\Delta x_X(T)$ だけを考慮することによって，この SQL が式（３）で与えられることを最初に示した．その導出法は非常に簡単で示唆に富むので，現在でもテキストや論文で使われている．測定誤差の大きさは負ではないから，この導出が正しければ SQL が存在すると考えてよいことになる．しかし Yuen が指摘したように相関項（式（４）の第３項）を無視しているので，正しくない．

量子力学のテキストでは自由粒子の波束は時間とともに拡散していくと書かれているので，位置測定の後に粒子が収縮状態に移れば波束の位置の拡がりが時間とともに小さくなるという Yuen の発見は筆者にとって驚きであった．Yuen は収縮状態をうまく使えば，SQL を破る位置測定があると考えた．

Caves は位置測定の SQL は存在すると考え，具体的な位置測定のモデルを用いて測定誤差の効果を初めて考察した．Caves は式（９）が成立すれば，たとえ自由粒子が Yuen の収縮状態に移ったとしても，式（10）より SQL が成立することを示した．筆者が SQL の証明に用いた不確定性関係式（26）は Caves が示した不確定性関係式（10）にヒントを得ている．式（８）の σ は筆者の表記法では $\epsilon(x_T)$ のことである．Caves の SQL の定義では，１回目と２回目の位置測定は同じ測定装置を用いなければならないので，これは $\epsilon(x_0)$ に等しい．残念ながら式（９）は必ずしも成立しない．筆者が常に成立することを証明した不等式（25）では，その測定誤差は測定前の位置の測定誤差 $\epsilon(x_0)$ ではなく，測定後の位置の測定誤差 $\epsilon(x_t)$ である．Caves が定式化した SQL は５章で論じたように，２回目の位置測定の結果の標準偏差であるから，１回目の測定値の測定誤差 $\epsilon(x_t)$ は含まれていない．Caves の SQL は，２つの位置測定は同じ測定装置を用いておこなわなければならない等の付加的な条件を付けているが，もしそれがないと容易に破られてしまう．

Ozawa は Yuen の提案した収縮状態を用いて，Caves の SQL を破る位置測定が具体的に存在することを示した．しかし Ozawa の位置測定では，対象粒子とプローブの相互作用（14）が運動量を保存しないという問題点がある．筆者は Ozawa と同じ考えに立ち，運動量を保存する相互作用（18）を用いた位置測定を提案し，それが Caves の SQL を破ることを示した．

最初に Braginsky と Vorontsov が自由粒子の位置測定の SQL を導入したときには，測定誤差を考慮しない大雑把な議論であったので，SQL を２回目の位置測定をおこなう直前の自由粒子の位置の標準偏差 $\Delta x(T)$ として定式化したのは仕方がなかったと思われる．しかし Caves が測定誤差まで含めてこの問題を考察したときには，Braginsky と Vorontsov が導入

した SQL の物理的意味を考えて，τ 秒間に自由粒子が移動した距離の測定値に対する SQL として定式化しなければならなかったと筆者は考える．Cavesの定式化した SQL には，２つの位置測定を同じ測定装置でおこなう必要があるなどの付加的条件が多くて，測定の精度に制限を与えるという SQL の存在意義がないように思える．

位置の測定装置として，いろいろなものを考えることができるが，本論文では次のような位置測定を考察した：プローブを所定の位置に設定し，それと自由粒子が相互作用した直後に，プローブの位置 X_t を別の測定装置を用いて誤差 0 で測定する．そして得られた値 X を用いて，自由粒子の測定前の位置 $\hat{x}_0$ と測定後の位置 $\hat{x}_t$ を予測する．このような位置測定に対して，筆者が定式化した移動距離の測定値に対する SQL（21）が常に成立していることを本論文で証明した．この証明のポイントは式（24）と（25）の２つである．特に式（25）が重要で，それは測定直後の自由粒子の位置のゆらぎ $\Delta x_X(t)$ の大きさが，測定後の粒子の位置 $\hat{x}_t$ に対する測定値の測定誤差 $\epsilon(x_t)$ 以下になることを示している．前論文[10] で測定による波束の収縮を論じたとき，位置測定の直後の対象粒子の位置の標準偏差は測定誤差 $\epsilon(x_t)$ に等しいことを示した．それは測定誤差 $\epsilon(x_t)$ が充分に小さくて，区間 $\{x|(x_t)_{\rm exp}-\epsilon(x_t)/2 \leq x \leq (x_t)_{\rm exp}+\epsilon(x_t)/2\}$ において粒子の波動関数 $\phi_0(x_0)$ の値が一定とみなせる場合の結果である．一般には式（25）が成立している．

式（25）が上で述べた位置測定に対して常に成立していることを７章で証明した．測定直後の自由粒子の波動関数が式（29）で与えられることは明らかである．このことと，$\hat{x}_t$ の測定値 $(x_t)_{\rm exp}$ が X と $\langle \hat{X}_0 \rangle$ の関数であって x の関数ではないという２つのことを用いて，式（25）を証明した．従って測定後の位置演算子 $\hat{x}_t$ と $\hat{X}_t$ が測定前のこれらの位置演算子 $\hat{x}_0$ と $\hat{X}_0$ の線形結合で与えられるという線形性の仮説[10, 16] を，この証明は全く必要としていない．

本論文は，欧文誌に投稿した論文[17] の内容と重複していることを，お断りしておきます．

注

注１：この式の導出に関しては，参考文献（10）を参照してください．

注２：筆者は前論文[13] でOzawaの測定誤差の定義は正しくないと述べたが，相互作用（14）の場合には，Ozawaの測定誤差は正しい測定誤差と一致している．

注３：ある物理モデルがある特定の座標系でのみ成立する条件を仮定しているとき，そのモデルでは運動量の保存則は成立していない．Ozawaの位置測定のモデルでは対象粒子とプローブの相互作用が運動量を保存していないだけでなく，別の意味でも運動量の保存則を破っていることになる．

注４：実はOzawaの議論においても，プローブの初期状態 $|\xi_0\rangle$ を収縮状態 $|\mu,\nu,\langle \hat{X}_0\rangle,\omega\rangle$ にとれば，測定後の自由粒子の状態は $|\mu,\nu,X-\langle \hat{X}_0\rangle,\omega\rangle$ に移行するので，Ozawaの仮定（17）は不要である．

注５：式（25）を参照．

13

参考文献

（１） V. B. Braginsky and Yu. I. Vorontsov, Ups. Fiz. Nauk 114, 41 (1974) [Sov. Phys. Ups. 17, 644 (1975)].
（２） H. P. Yuen, Phys. Rev. Lett. 51, 719 (1983).
（３） K. Wodkiewicz, Phys. Rev. Lett. 52, 787 (1984); H. P. Yuen, Phys. Rev. Lett. 52, 788 (1984).
（４） R. Lynch, Phys. Rev. Lett. 52, 1729 (1984); H. P. Yuen, Phys. Rev. Lett. 52, 1730 (1984).
（５） R. Lynch, Phys. Rev. Lett. 54, 1599 (1985).
（６） C. M. Caves, Phys. Rev. Lett. 54, 2465 (1985).
（７） W.-T. Ni, Phys. Rev. A 33, 2225 (1986).
（８） M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 60, 385 (1988).
（９） J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1955).
（10） 小杉誠司「Heisenbergの不確定性原理における位置の測定値の不確定性」,『淑徳短期大学紀要』第50号，2011，p.145-158.
（11） A. Messiah, “Quantum Mechanics”, Dover Publications, 1999, p.299.
（12） J. Maddox, Nature 331, 559 (1988).
（13） 小杉誠司「Heisenbergの不確定性原理における位置測定の誤差」,『淑徳短期大学紀要』第48号，2009，p.155-166.
（14） C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg and M. Zimmermann, Rev. Mod. Phys. 52, 341 (1980).
（15） V. B. Braginsky, F. Ya. Khalili, *Quantum Measurement* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992), p.13, p107.
（16） 小杉誠司「位置の測定装置における時間発展演算子」,『淑徳短期大学紀要』第49号，2010，p.1-11.
（17） S. Kosugi, Phys. Rev. A 82, 022118 (2010).