

位置の測定装置における時間発展演算子Ⅲ

小 杉 誠 司

(2013年9月27日受理)

概 要

位置の測定装置における対象粒子とプローブの相互作用が、相対座標の関数であるポテンシャルで表わされる場合に、相互作用後の粒子とプローブの位置演算子を求め、線形性の仮説が成立していることを示した。

von NeumannやOzawaは、相互作用後の演算子を求める際に、運動エネルギーを無視するという近似をおこなっている。運動量を保存する相互作用 $K(\hat{p}_0 + \hat{P}_0)(\hat{X}_0 - \hat{x}_0)$ の場合に、運動エネルギーを無視しないで正確に相互作用後の位置演算子と運動量演算子を求めた。ここで K は相互作用の強さを表すパラメータで、 \hat{x}_0 と \hat{X}_0 はそれぞれ対象粒子とプローブの相互作用前の位置演算子、 \hat{p}_0 と \hat{P}_0 はそれぞれの相互作用前の運動量演算子である。そして、この近似をしなければ、相互作用後の位置演算子は \hat{p}_0 と \hat{P}_0 に依存してしまうので、この相互作用を用いて位置の測定ができないことを明らかにした。

キーワード 線形性の仮説, 測定の理論, 位置測定, 運動量の保存則,
エネルギーの保存則

1 はじめに

前論文 I ¹⁾ で位置の測定装置における対象粒子とプローブの時間発展演算子 \hat{U} について考察した。相互作用後の粒子とプローブの位置演算子 \hat{x}_t , \hat{X}_t は、相互作用前のそれらの位置演算子 \hat{x}_0 , \hat{X}_0 の線形結合で与えられるという線形性の仮説

$$\hat{x}_t = \hat{X}_0 + \alpha_1(\hat{x}_0 - \hat{X}_0), \quad (1)$$

$$\hat{X}_t = \hat{X}_0 + \beta_1(\hat{x}_0 - \hat{X}_0) \quad (2)$$

が、位置の測定装置の相互作用の場合にはすべての相互作用で成立していることを、次の3つの条件を要請して証明しようとした。

①位置の測定装置においては測定結果は一意的に決定されなければならない。

②粒子とプローブの相互作用は運動量を保存しなければならない。

③相互作用は角運動量を保存しなければならない。

しかし前論文Ⅰでは最終的に線形性の仮説の正しさを証明することができなかった。

前論文Ⅱ²⁾では、上で述べた線形性の仮説を、測定装置の時間発展演算子 \hat{U} が次の4つの条件を満たすことを要請することによって証明した。

①位置の測定装置においては測定結果は一意的に決定されなければならない。

②粒子とプローブの相互作用は運動量を保存しなければならない。

③ \hat{x}_0 の測定では、測定値の平均は測定対象である \hat{x}_0 の平均に等しくなければならない。

④粒子とプローブの時間発展演算子 \hat{U} はユニタリである。

これら4つの条件を要請することは物理的に考えて合理的であるので、前論文Ⅱで線形性の仮説の正しさが証明されたと考えてよい。

本論文では違った観点から、線形性の仮説の正しさを示す。前論文において考察した位置測定においては、対象粒子とプローブは相互作用してその位置や運動量を変えるが、このことは2つの粒子の衝突現象に類似している。対象粒子とプローブの相互作用を2つの粒子の散乱と捉えると、弾性散乱をおこなう場合と非弾性散乱をおこなう場合に大別される。両方の場合に運動量の保存則とエネルギーの保存則が成立することを要請すると、相互作用後の粒子とプローブの運動量 p_t , P_t は相互作用前の両者の運動量 p_0 , P_0 の線形結合で表される。しかし非弾性散乱の場合には2つの解が得られるので、相互作用後のプローブの位置 \hat{X}_t の測定値から一意的に粒子の位置 \hat{x}_0 , \hat{x}_t の測定値を予測できない。従って非弾性散乱を起こす時間発展演算子 \hat{U} を位置の測定装置に用いることはできない。

弾性散乱の場合も2つの解が出てくるが、1つは自明な解であって、相互作用後の粒子とプローブの運動量は相互作用前のそれと同じである。(相互作用後の粒子とプローブの運動量が相互作用前のそれに等しければ、当然運動量とエネルギーは保存している。) この場合は相互作用をおこなわない場合と同じであるから、測定から除外することができる。すなわち相互作用後にプローブの位置を測定して、その値が相互作用前の値 X_0 と同じであるときには、それを除外すればよい。

更にポテンシャル $V(r)$ によって対象粒子とプローブが相互作用する問題を量子論を用いて解き、線形性の仮説が成立していることを示す。またその結果をポテンシャルによる波束の散乱問題と対比し、入射波がほとんど完全に反射される場合が、位置の測定装置になっていることを明らかにする。

6章では、量子論による別の方法を用いて、von NeumannやOzawaがおこなっている運動エネルギーを無視するという近似をしない場合には、相互作用後の位置演算子が相互作用前の対象粒子やプローブの運動量演算子に依存してしまうことを示す。

2 2粒子の衝突問題

運動量と運動エネルギーを保存する非相対論的な2つの粒子の衝突を考える．2体系の運動エネルギーの和は，重心の運動エネルギーと相対運動の運動エネルギーの和に変換することができる³⁾．2体系の運動エネルギーの和は相互作用の前後で保存することと，重心の運動量は相互作用の前後で保存することから，相対運動の運動エネルギーが相互作用の前後で保存しなければならない．位置測定の対象である粒子の質量を m ，相互作用前と後の運動量をそれぞれ p_0 ， p_t とする．同様にプローブの質量を M ，相互作用前と後の運動量をそれぞれ P_0 ， P_t とすると，相対運動の運動量は $p_r = \frac{M}{m+M}p_0 - \frac{m}{m+M}P_0$ であるから，相対運動の運動エネルギーの保存より

$$\gamma_2 p_t - \gamma_1 P_t = \pm(\gamma_2 p_0 - \gamma_1 P_0). \quad (3)$$

ここで

$$\gamma_1 = \frac{m}{m+M}, \quad \gamma_2 = \frac{M}{m+M}, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1. \quad (4)$$

相互作用の前後で運動量の和は保存するから

$$p_0 + P_0 = p_t + P_t. \quad (5)$$

式(3)と(5)を連立して解くと，次の2つの解がある．

$$\textcircled{1} \gamma_2 p_t - \gamma_1 P_t = \gamma_2 p_0 - \gamma_1 P_0 \text{ のとき,}$$

$$p_t = p_0, \quad P_t = P_0. \quad (6)$$

これは自明の解である．

$$\textcircled{2} \gamma_2 p_t - \gamma_1 P_t = -(\gamma_2 p_0 - \gamma_1 P_0) \text{ のとき,}$$

$$p_t = (2\gamma_1 - 1)p_0 + 2\gamma_1 P_0, \quad P_t = 2(1 - \gamma_1)p_0 + (1 - 2\gamma_1)P_0. \quad (7)$$

実際の古典力学的な衝突で起こるのは②の解である．これより衝突後の2粒子の運動量 p_t ， P_t は衝突前の運動量 p_0 ， P_0 の線形結合になっていることがわかる．このことは位置測定において仮定した線形性の仮説を支持しているように思われる．

上の結果は測定前に運動量が p_0 ， P_0 であった対象粒子とプローブが相互作用して，相互作用後の運動量が p_t ， P_t になったと考えることができる．このことを量子論で表現すると

$$\hat{U}|p_0, P_0\rangle = \exp\{i\delta(p_0, P_0)\}|p_t, P_t\rangle \quad (8)$$

となる．ここで $\exp\{i\delta(p_0, P_0)\}$ は位相因子であり，テンソル積 $|p_0\rangle \otimes |P_0\rangle$ を $|p_0, P_0\rangle$ と略記した．また $|p_0\rangle$ ， $|P_0\rangle$ は相互作用前の運動量演算子 \hat{p}_0 ， \hat{P}_0 の固有ベクトルである．

相互作用後の運動量演算子は時間発展演算子 \hat{U} を用いて $\hat{p}_t = \hat{U}^\dagger \hat{p}_0 \hat{U}$ ， $\hat{P}_t = \hat{U}^\dagger \hat{P}_0 \hat{U}$

となるが、式 (7) より

$$\hat{p}_t|p_0, P_0\rangle = p_t|p_0, P_0\rangle, \quad \hat{P}_t|p_0, P_0\rangle = P_t|p_0, P_0\rangle \quad (9)$$

を導出することができる。上の式は任意のベクトル $|p_0, P_0\rangle$ に対して成立しているので

$$\hat{p}_t = (2\gamma_1 - 1)\hat{p}_0 + 2\gamma_1\hat{P}_0, \quad \hat{P}_t = 2(1 - \gamma_1)\hat{p}_0 + (1 - 2\gamma_1)\hat{P}_0 \quad (10)$$

を得る。

2 粒子の相対位置と重心位置の演算子は、それぞれ

$$\hat{r}_0 = \hat{x}_0 - \hat{X}_0, \quad \hat{R}_0 = \gamma_1\hat{x}_0 + \gamma_2\hat{X}_0 \quad (11)$$

である。それらに正準共役な運動量演算子は

$$\hat{p}_r = \gamma_2\hat{p}_0 - \gamma_1\hat{P}_0, \quad \hat{P}_G = \hat{p}_0 + \hat{P}_0 \quad (12)$$

である。式 (10) より相互作用後の運動量演算子は

$$\hat{p}_r(t) = -\hat{p}_r, \quad \hat{P}_G(t) = \hat{p}_t + \hat{P}_t = \hat{p}_0 + \hat{P}_0 \equiv \hat{P}_G \quad (13)$$

となる。

相互作用後の位置の演算子 $\hat{r}_t = \hat{U}^\dagger \hat{r}_0 \hat{U}$, $\hat{R}_t = \hat{U}^\dagger \hat{R}_0 \hat{U}$ を求める。本論文で考察している位置測定では、プローブの位置 \hat{X}_t の測定値 X と相互作用前のプローブの位置の平均 $\langle \hat{X}_0 \rangle$ を用いて対象粒子の位置 \hat{x}_0 と \hat{x}_t の測定値を求めているので、 \hat{x}_t や \hat{X}_t は \hat{p}_0 や \hat{P}_0 の関数であってはならない。従って \hat{r}_t と \hat{R}_t は \hat{r}_0 と \hat{R}_0 のみの関数である^{注1)}。よって

$$\hat{r}_t = f_{0,0} + f_{1,0}\hat{r}_0 + f_{0,1}\hat{R}_0 + f_{2,0}\hat{r}_0^2 + f_{1,1}\hat{r}_0\hat{R}_0 + f_{0,2}\hat{R}_0^2 + \dots$$

と展開する。ここで正確には $f_{1,0}\hat{r}_0 \otimes \hat{I}$ と書くべきところを $f_{1,0}\hat{r}_0$ と略記した。交換関係式の条件

$$[\hat{r}_t, \hat{p}_r(t)] = i\hbar, \quad [\hat{r}_t, \hat{P}_G(t)] = [\hat{r}_t, \hat{P}_G] = 0 \quad (14)$$

より展開係数 $f_{i,j}$ を求めると、

$$f_{1,0} = -1, \quad f_{0,1} = 0, \quad f_{i,j} = 0 \quad \text{for } i + j \geq 2.$$

従って

$$\hat{r}_t = f_{0,0} - \hat{r}_0.$$

\hat{U} はパリティ変換に対して不変であるとする^{注2)}, $\hat{r}_0 \rightarrow -\hat{r}_0$ のとき $\hat{r}_t \rightarrow -\hat{r}_t$. よって $f_{0,0} = 0$.

従って

$$\hat{r}_t = -\hat{r}_0. \quad (15)$$

\hat{R}_t についても, 上と同様に

$$\hat{R}_t = g_{0,0} + g_{1,0}\hat{r}_0 + g_{0,1}\hat{R}_0 + g_{2,0}\hat{r}_0^2 + g_{1,1}\hat{r}_0\hat{R}_0 + f_{0,2}\hat{R}_0^2 + \cdots$$

と展開し, 交換関係式の条件

$$[\hat{R}_t, \hat{p}_r(t)] = 0, \quad [\hat{R}_t, \hat{P}_G(t)] = i\hbar \quad (16)$$

を用いて展開係数 $g_{i,j}$ を求めて,

$$\hat{R}_t = \hat{R}_0 \quad (17)$$

を得る.

式 (15), (17) を $\hat{r}_t = \hat{x}_t - \hat{X}_t$, $\hat{R}_t = \gamma_1\hat{x}_t + \gamma_2\hat{X}_t$ に代入して, 式 (4) を用いると,

$$\hat{x}_t = (2\gamma_1 - 1)\hat{x}_0 + 2(1 - \gamma_1)\hat{X}_0, \quad \hat{X}_t = 2\gamma_1\hat{x}_0 + (1 - 2\gamma_1)\hat{X}_0 \quad (18)$$

を得る. これはまさに \hat{x}_t と \hat{X}_t が \hat{x}_0 と \hat{X}_0 の線形結合になっているので, 線形性の仮説の正しさを示している.

①の自明の解の場合には

$$\hat{p}_t = \hat{p}_0, \quad \hat{P}_t = \hat{P}_0 \quad (19)$$

となる. このときには

$$\hat{x}_t = \hat{x}_0, \quad \hat{X}_t = \hat{X}_0 \quad (20)$$

となり, 粒子とプローブが相互作用しない場合と区別できない. また \hat{X}_t は \hat{x}_0 の関数になっていないので, \hat{X}_t の測定値より \hat{x}_0 の測定値を求めることができない. 従ってこの場合には, 位置の測定をすることができない. この自明の解の場合には, 上の式 (17) は成立しているが, 式 (15) の代わりに $\hat{r}_t = \hat{r}_0$ が成立している.

以上のことより, 非相対論の枠組みで, 相互作用の前後で粒子とプローブの運動量とエネルギーが保存することから, 線形性の仮説が導出された.

3 非弾性散乱の影響

粒子とプローブが非弾性散乱を起こす場合を考える^{注3)}. 2体系の全ハミルトニアンが \hat{x}_0 , \hat{p}_0 , \hat{X}_0 , \hat{P}_0 のみの関数のときには, 対象粒子やプローブの内部構造を考えていないことになる. 従ってプローブの内部状態が変わり励起状態になる場合を考えるためには, それはプローブの内部ハミルトニアンを含み, それは内部状態を示すオブザーバブルの関数になる. このときには相互作用の前後で運動エネルギーは保存していない.

換算質量を $\mu = \frac{mM}{m+M}$ として, 相互作用前の相対運動の運動エネルギー $(\gamma_2 p_0 - \gamma_1 P_0)^2 / 2\mu$ が励起エネルギー e_{ex} の k 倍に等しいと置いたとき,

$$\frac{1}{2\mu}(\gamma_2 p_0 - \gamma_1 P_0)^2 = k e_{ex}. \quad (21)$$

このとき $k > 1$ でなければ非弾性散乱は起きない。また $k \rightarrow \infty$ のとき、すなわち運動エネルギーが励起エネルギーに比べて非常に大きいとき、 e_{ex} の効果はなくなるので、弾性散乱の結果に一致すると予想される。このとき重心の運動エネルギーは相互作用の前後で不変なので、エネルギーの保存則より

$$\frac{1}{2\mu}(\gamma_2 p_0 - \gamma_1 P_0)^2 = \frac{1}{2\mu}(\gamma_2 p_t - \gamma_1 P_t)^2 + \frac{1}{k} \frac{1}{2\mu}(\gamma_2 p_0 - \gamma_1 P_0)^2.$$

これより $\kappa = \sqrt{\frac{k-1}{k}}$ と置くと

$$\gamma_2 p_t - \gamma_1 P_t = \pm \kappa (\gamma_2 p_0 - \gamma_1 P_0), \quad 0 < \kappa < 1. \quad (22)$$

相互作用の前後で運動量が保存することから、式 (5) が成立する。式 (5) と (22) を連立して解いて、次の2つの解を得る：

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad p_t &= \{\kappa + (1 - \kappa)\gamma_1\}p_0 + (1 - \kappa)\gamma_1 P_0, \\ P_t &= (1 - \kappa)(1 - \gamma_1)p_0 + (1 - \gamma_1 + \kappa\gamma_1)P_0. \\ \textcircled{2} \quad p_t &= \{-\kappa + (1 + \kappa)\gamma_1\}p_0 + (1 + \kappa)\gamma_1 P_0, \\ P_t &= (1 + \kappa)(1 - \gamma_1)p_0 + \{1 - (1 + \kappa)\gamma_1\}P_0. \end{aligned}$$

従って非弾性散乱の場合には、 c_a , c_b を複素数の定数として

$$\hat{U}|p_0, P_0\rangle = c_a|p_a, P_a\rangle + c_b|p_b, P_b\rangle$$

となる。ここで p_a , P_a は①の解の p_t , P_t であり、 p_b , P_b は②の解の p_t , P_t である：

$$\hat{U}|p_0, P_0\rangle = c_a|a_{a,1}p_0 + a_{a,2}P_0, b_{a,1}p_0 + b_{a,2}P_0\rangle + c_b|a_{b,1}p_0 + a_{b,2}P_0, b_{b,1}p_0 + b_{b,2}P_0\rangle.$$

ここで $0 < \kappa$, $0 < \gamma_1 < 1$ であるから

$$a_{a,1} \neq a_{b,1}, \quad a_{a,2} \neq a_{b,2}, \quad b_{a,1} \neq b_{b,1}, \quad b_{a,2} \neq b_{b,2} \quad (23)$$

である。これより

$$\begin{aligned} 6 \quad \langle x, X | \hat{U} | x_0, X_0 \rangle &= c_a \delta(x_0 - a_{a,1}x - b_{a,1}X) \delta(X_0 - a_{a,2}x - b_{a,2}X) \\ &+ c_b \delta(x_0 - a_{b,1}x - b_{b,1}X) \delta(X_0 - a_{b,2}x - b_{b,2}X) \end{aligned}$$

が成立する。このとき

$$\begin{aligned}\langle x, X | \hat{U} | x_0, X_0 \rangle &= \frac{c_a}{|\Gamma_a(\alpha\beta)|} \delta(x - \alpha_{a,1}x_0 - \alpha_{a,2}X_0) \delta(X - \beta_{a,1}x_0 - \beta_{a,2}X_0) \\ &+ \frac{c_b}{|\Gamma_b(\alpha\beta)|} \delta(x - \alpha_{b,1}x_0 - \alpha_{b,2}X_0) \delta(X - \beta_{b,1}x_0 - \beta_{b,2}X_0).\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\alpha_{k,1} &= \Gamma_k(ab)b_{k,2}, & \alpha_{k,2} &= -\Gamma_k(ab)b_{k,1}, \\ \beta_{k,1} &= -\Gamma_k(ab)a_{k,2}, & \beta_{k,2} &= \Gamma_k(ab)a_{k,1}, \\ \Gamma_k(ab) &= \frac{1}{a_{k,1}b_{k,2} - a_{k,2}b_{k,1}}, \\ \Gamma_k(\alpha\beta) &= \frac{1}{\alpha_{k,1}\beta_{k,2} - \alpha_{k,2}\beta_{k,1}}, \quad \text{for } k = a, b.\end{aligned}$$

$|\Gamma_k(\alpha\beta)| = 1/\kappa$ であるから

$$\begin{aligned}\hat{U}|x_0, X_0\rangle &= \frac{1}{\kappa}(c_a|X_0 + \alpha_{a,1}(x_0 - X_0), X_0 + \beta_{a,1}(x_0 - X_0)\rangle \\ &+ c_b|X_0 + \alpha_{b,1}(x_0 - X_0), X_0 + \beta_{b,1}(x_0 - X_0)\rangle)\end{aligned}\quad (24)$$

となる. ここで式 (23), 上の $\alpha_{k,1}$ 及び $\beta_{k,1}$ の定義式より, $\alpha_{a,1} \neq \alpha_{b,1}$, $\beta_{a,1} \neq \beta_{b,1}$ である. 従って, 式 (24) の右辺の 2 つのベクトルは独立であるので, 1 つのベクトルにまとめることはできない. よって, X_t の測定値から x_0 の値を一意的に決定することができない^{注4)}. よって非弾性散乱を起こす時間発展演算子 \hat{U} は位置の測定装置に使うことができない.

しかし $k \rightarrow \infty$ のとき, すなわち $\kappa \rightarrow 1$ のとき, ①の解は弾性散乱の自明の解に, ②の解は弾性散乱の (7) の解になる. 従って相対運動の運動エネルギーが励起エネルギーと比較して非常に大きい場合には, 弾性散乱の場合に一致するのでこの限りではない.

4 量子論による導出

2 章では古典力学の 2 体の衝突問題を考え, その結果を式 (8) において量子論の記述に変えた. この章では最初から量子論で考察する. ポテンシャル $V(r)$ によって 2 つの物体が相互作用する場合, このときの全ハミルトニアンを重心運動のハミルトニアン \hat{H}_G と相対運動のハミルトニアン \hat{H}_r の和でかくことができる:

$$\hat{H} = \hat{H}_G + \hat{H}_r. \quad (25)$$

ここで

$$\hat{H}_G = \frac{\hat{P}_G^2}{2(m+M)}, \quad \hat{H}_r = \frac{\hat{p}_r^2}{2\mu} + V(|\hat{r}_0|). \quad (26)$$

\hat{r}_0 と \hat{R}_0 の固有ベクトルをそれぞれ $|r_0\rangle$, $|R_0\rangle$ とする:

$$\hat{r}_0|r_0\rangle = r_0|r_0\rangle, \quad \hat{R}_0|R_0\rangle = R_0|R_0\rangle. \quad (27)$$

重心運動量と相対運動は分離しているので, 相互作用後の相対位置 \hat{r}_t は重心位置 \hat{R}_0 に依存しない. 本論文で考察している位置測定では \hat{x}_t , \hat{X}_t は \hat{p}_0 , \hat{P}_0 の関数であってはならないので, \hat{r}_t は \hat{p}_0 , \hat{P}_0 の関数ではない. よって $\hat{r}_t = f(\hat{r}_0)$ とかける.

これより $\hat{U}_r = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_r t\}$ として,

$$\hat{U}_r|r_0\rangle = \exp\{i\delta(r_0)\}|f(r_0)\rangle \quad (28)$$

を得る. また $r = f(r_0)$ として $\langle r|\hat{U}_r|\phi_r\rangle = \exp\{i\delta\}\phi_r(r_0)$ を得るので, \hat{U}_r のユニタリ性

$$\langle\phi_r|\hat{U}_r^\dagger\hat{U}_r|\phi_r\rangle = \langle\phi_r|\phi_r\rangle \quad \text{より} \quad \int\langle\phi_r|\hat{U}_r^\dagger|r\rangle\langle r|\hat{U}_r|\phi_r\rangle dr = \int\langle\phi_r|r_0\rangle\langle r_0|\phi_r\rangle dr_0.$$

従って

$$\int|\phi_r(r_0)|^2 dr = \int|\phi_r(r_0)|^2 dr_0. \quad (29)$$

よって

$$\left|\frac{df(r_0)}{dr_0}\right| = 1. \quad (30)$$

従って

$$f(r_0) = \pm r_0 + f_0, \quad f_0 \text{ は定数.}$$

式 (26) を参照して, パリティ変換 $\hat{r}_0 \rightarrow -\hat{r}_0$, $\hat{p}_r \rightarrow -\hat{p}_r$ に対して \hat{H}_r が不変であることから $f_0 = 0$. これより 2 つの解

$$\textcircled{1} \hat{r}_t = \hat{r}_0, \quad \hat{p}_r(t) = \hat{p}_r, \quad (31)$$

$$\textcircled{2} \hat{r}_t = -\hat{r}_0, \quad \hat{p}_r(t) = -\hat{p}_r \quad (32)$$

を得る.

重心運動についても相対運動の場合と同様に考えると, \hat{R}_t は \hat{R}_0 のみの関数となるが, 交換関係 $[\hat{R}_t, \hat{P}_G(t)] = i\hbar$ が成立しなければならないことから

$$8 \quad \hat{R}_t = \hat{R}_0 \quad (33)$$

となる.

従ってハミルトニアンが式 (25), (26) で与えられる場合には, 筆者の線形性の仮説が正当化されることがわかった.

5 ポテンシャルによる波束の散乱

相対運動を図1のような箱型のポテンシャルによる散乱と考えたとき、4章の①と②の2つの解は次の2つの場合に対応していると考えられる。左側から波束がエネルギー e_0 で入射したとする。通常はポテンシャルで反射された反射波とポテンシャルを通過していく透過波の2つができる。しかし

- ① $e_0 \gg V_0$ のとき、入射波はポテンシャルによってほとんど反射されず、そのまま通過していく。すなわち $\hat{p}_r(t) = \hat{p}_r$ 。
- ② $e_0 \ll V_0$ のとき入射波はポテンシャルをほとんど透過せずに、ほとんど完全に反射される。すなわち $\hat{p}_r(t) = -\hat{p}_r$ 。

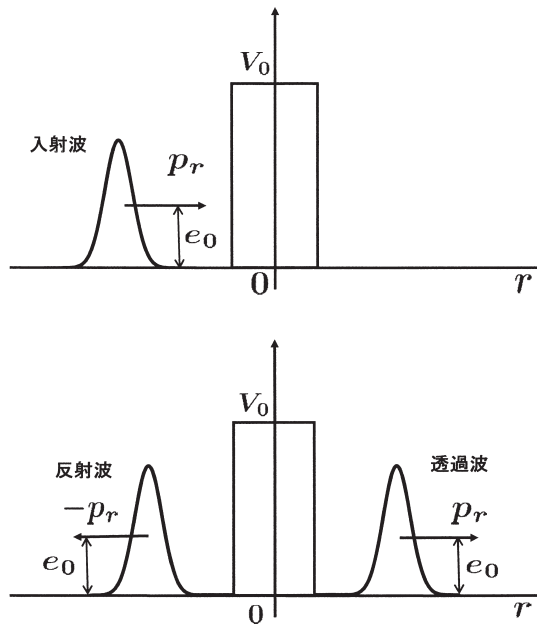


図1：ポテンシャルによる波束の散乱

相互作用後の波束は、一般には反射波と透過波の重ね合わせになるが、位置の測定装置において対象粒子とプローブが相互作用する場合には、相互作用後の状態は1つしかないと考えているので、上の2つの解が得られる。そして、それぞれの解が4章の①と②の2つの解に対応している。このことから、対象粒子とプローブのポテンシャルが $e_0 \ll V_0$ の条件を満たすとき、位置の測定装置になることがわかる。

6 量子論による別の導出

前章で考察した問題を量子論の別の方法を用いて解く． \hat{A} と \hat{B} が t に無関係な演算子であるとき， $\hat{B}(t) = \exp\{i\hat{A}t\}\hat{B}\exp\{-i\hat{A}t\}$ は次の t の冪級数に展開できる³⁾：

$$\hat{B}(t) = \hat{B} + i[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{i^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \cdots \quad (34)$$

$\hat{A} = \frac{1}{\hbar}\hat{H}_r$ ， $\hat{B} = \hat{r}_0$ とすれば，

$$\hat{r}_t = \hat{r}_0 + \frac{\hat{p}_r}{\mu}t + \frac{t^2}{2\mu}\left(-\frac{dV(x)}{dx}\right)\Big|_{x=\hat{r}_0} + \cdots \quad (35)$$

上の式の右辺第2項は $v_0 t$ に，第3項は $\frac{1}{2}(F/\mu)t^2$ に対応している． $\hat{B} = \hat{p}_r$ としたときの展開は

$$\hat{p}_r(t) = \hat{p}_r - t \frac{dV(x)}{dx}\Big|_{x=\hat{r}_0} + \cdots \quad (36)$$

となる．上の式の右辺第2項は力積に対応していると考えられる．以上は相互作用後の相対運動の演算子に対して考察したが，重心運動に対しても同様に解くことができる．

$\hat{A} = \frac{1}{\hbar}\hat{H}_G$ ， $\hat{B} = \hat{R}_0$ あるいは \hat{P}_G として

$$\hat{R}_t = \hat{R}_0 + \frac{\hat{P}_G}{m+M}t, \quad \hat{P}_G(t) = \hat{P}_G \quad (37)$$

を得る．

前章の結果と比較すると，前章の①の結果は t の関数になっている項を無視していることがわかる．これは相互作用の時間 t が非常に小さい場合を考えていることになる．もしこれらの項が無視できなければ，一般には \hat{r}_t や \hat{R}_t は \hat{p}_r や \hat{P}_G に依存してしまうので， \hat{X}_t の測定値から \hat{x}_0 や \hat{x}_t を求めることができなくなってしまう．（すぐ後で述べるように， t を含む項があっても \hat{r}_t が \hat{r}_0 のみの関数になっている場合もある．）従って相互作用の時間 t が非常に小さいときに，この相互作用を位置測定に用いることができることがわかる．

しかし式 (35)，(36) をみると，前章の解である $\hat{r}_t = -\hat{r}_0$ ， $\hat{p}_r(t) = -\hat{p}_r$ が導出できないように思える．この解こそ求めていた解であった．しかし，それは一見するとそのように思えるだけであって，実際には式 (35)，(36) は，前章の②の解も含んでいる．このことを確認するために，調和振動子のポテンシャル $V(x) = \mu\omega^2 x^2/2$ の場合を考える．このときの解は

$$\begin{aligned} \hat{r}_t &= \hat{r}_0 \cos \omega t + \frac{\hat{p}_r}{\mu\omega} \sin \omega t, \\ \hat{p}_r(t) &= \hat{p}_r \cos \omega t - \mu\omega \hat{r}_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

となるが⁴⁾、これを t の冪で展開したものと、式 (35)、(36) の展開式が一致していることを確かめることができる。

$t = 0$ のとき $\hat{r}_t = \hat{r}_0$ 、 $\hat{p}_r(t) = \hat{p}_r$ となり、上で述べたことと一致している。また $\omega t = (2n+1)\pi$ 、 n は整数のとき $\hat{r}_t = -\hat{r}_0$ 、 $\hat{p}_r(t) = -\hat{p}_r$ となるので、式 (35)、(36) は前章の②の解を含んでいることがわかる。また \hat{r}_t が \hat{r}_0 のみの関数になるのは、 $\omega t = n\pi$ 、 n は整数のときのみであるから、位置の測定装置の場合には、前章の①と②の解しかないのである。

次に、測定の量子論でよく使われる相互作用を用いた場合を考察する。以前紹介した von Neumann 型⁵⁾ や Ozawa の相互作用^{6,7)} は運動量が保存していないので、次の相互作用の場合を考察する：

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_0^2}{2m} + \frac{\hat{P}_0^2}{2M} + K(\hat{p}_0 + \hat{P}_0)(\hat{X}_0 - \hat{x}_0). \quad (38)$$

K は実定数で相互作用の大きさを決めているパラメータである。ここでは以前には省略していた対象粒子とプローブの運動エネルギーを考慮している。式 (34) を用いて計算すると、

$$\hat{x}_t = \hat{x}_0 - g_0(\hat{x}_0 - \hat{X}_0) + \frac{\hat{p}_0}{m}t + \frac{g_0\hat{P}_0}{2\mu}t - \frac{g_0^2(\hat{p}_0 + \hat{P}_0)}{6\mu}t, \quad (39)$$

$$\hat{X}_t = \hat{X}_0 - g_0(\hat{x}_0 - \hat{X}_0) + \frac{\hat{P}_0}{M}t - \frac{g_0\hat{p}_0}{2\mu}t - \frac{g_0^2(\hat{p}_0 + \hat{P}_0)}{6\mu}t, \quad (40)$$

$$\hat{p}_t = \hat{p}_0 + g_0(\hat{p}_0 + \hat{P}_0), \quad (41)$$

$$\hat{P}_t = \hat{P}_0 - g_0(\hat{p}_0 + \hat{P}_0) \quad (42)$$

を得る。ここで $g_0 = Kt$ である。この結果は高次の項を省略した近似式ではなく正確なものである。式 (41)、(42) より運動量の和が保存していることがわかる。 \hat{x}_t と \hat{X}_t で \hat{p}_0 や \hat{P}_0 に依存している項（それは時間 t に依存した項でもあるが）を省いた結果は、 \hat{H} で運動エネルギーの項を省いたときに得られる結果と一致している。少なくともこのハミルトニアンの場合には、運動エネルギーを無視するという通常おこなわれている近似は、得られた結果において、 \hat{p}_0 や \hat{P}_0 に依存している項を無視するという近似に等しい。von Neumann は最初の位置の測定理論において運動エネルギーの項を無視したが⁵⁾、もしこれを含めていればその結果は \hat{p}_0 や \hat{P}_0 に依存した項が出てくるので、簡単に問題を解くことはできなかったはずである。

\hat{p}_0 や \hat{P}_0 に依存している項を無視できる場合を考えると、

$$\hat{x}_t - \hat{X}_t = \hat{x}_0 - \hat{X}_0 \quad (43)$$

が成立していることがわかる。すなわち得られた解は $\hat{r}_t = \hat{r}_0$ であって $\hat{r}_t = -\hat{r}_0$ ではない。このことは式 (41)、(42) から $\hat{p}_r(t) = \hat{p}_r$ が得られることからわかる。しかし、いま考察しているハミルトニアン (38) は明らかに、重心運動と相対運動に分離できない

から、前章の結果と直接比較することはできない。すなわち $\hat{r}_t = \hat{r}_0$ の場合であっても、測定装置としてこの時間発展演算子 \hat{U} を用いることができる。実際に式 (39) と (40) において \hat{p}_0 や \hat{P}_0 に依存している項を無視すれば、線形性の仮説の式 (1) と (2) に一致していることがわかる。

またこの式が成立している場合には、運動エネルギーの和が相互作用の前後で保存していることが次の議論よりわかる：全ハミルトニアンは相互作用の前後で保存しているので

$$\frac{\hat{p}_t^2}{2m} + \frac{\hat{P}_t^2}{2M} + K(\hat{p}_t + \hat{P}_t)(\hat{X}_t - \hat{x}_t) = \frac{\hat{p}_0^2}{2m} + \frac{\hat{P}_0^2}{2M} + K(\hat{p}_0 + \hat{P}_0)(\hat{X}_0 - \hat{x}_0). \quad (44)$$

ここで運動量が保存しているので、式 (43) が成立しているときには相互作用の項が保存し、

$$\frac{\hat{p}_t^2}{2m} + \frac{\hat{P}_t^2}{2M} = \frac{\hat{p}_0^2}{2m} + \frac{\hat{P}_0^2}{2M} \quad (45)$$

が成立している。QED.

7 まとめと考察

本論文では、前論文Ⅱとは違った観点から、相互作用後の粒子とプローブの位置演算子 \hat{x}_t , \hat{X}_t が、相互作用前のそれらの位置演算子 \hat{x}_0 , \hat{X}_0 の線形結合で与えられるという線形性の仮説の正しさを示した。

最初に、測定過程を2つの粒子の衝突問題と考え、エネルギーと運動量の保存則を用いて、古典論から測定後の2つの粒子の運動量を求めた。この結果を式 (8) を用いて量子論で表現した^{注5)}。得られた結果 (18) は線形性の仮説の正しさを示していた。またこのときに非弾性散乱を起こす場合には、 \hat{X}_t の測定値から \hat{x}_0 の測定値を一意的に決定することができないので、測定装置にすることができないことを明らかにした。

またこの衝突問題をポテンシャル $V(r)$ によって2つの物体が相互作用する量子論の問題として捉えた。ポテンシャルが相対座標のみの関数であるとき、相対運動と重心運動に分離することができる。 \hat{x}_t と \hat{X}_t は \hat{p}_0 と \hat{P}_0 の関数であってはならないので、 \hat{r}_t は \hat{p}_0 と \hat{P}_0 の関数ではない。また相対運動と重心運動に分離しているので、 $\hat{r}_t = f(\hat{r}_0)$ となる。これより4章の①と②の2つの解を得た。これより筆者の線形性の仮説が成立していることを示した。

また量子論による別の方法を用いて、相互作用後の位置演算子や運動量演算子を求めた。von Neumann や Ozawa はそれぞれ特別な相互作用を仮定し、相互作用後の演算子を求めているが、その際に運動エネルギーを無視するという近似をおこなっている。運動量を保存する相互作用 (38) の場合に、運動エネルギーを無視しないで高次の項まで正確に相互作用後の位置演算子と運動量演算子を求めた。そして、この結果から、もしこの近似をしなければ、相互作用後の位置演算子は運動量演算子 \hat{p}_0 と \hat{P}_0 に依存してしまうので、この相互作

用を用いて位置の測定ができないことを明らかにした.

注

注1: 4章の議論のように, 重心運動と相対運動が分離していると考えて, \hat{r}_t と \hat{R}_t はそれぞれ \hat{r}_0 と \hat{R}_0 のみの関数と考えれば, もう少し簡単にこの問題を解くことができる.

注2: このように仮定することは十分に根拠がある.

注3: 結果は, 粒子とプローブのどちらが励起するかに依存していない.

注4: 非弾性散乱がおこるばあいには, 一般には弾性散乱もおこる. 従って, 一般には式 (24) の右辺は3つの項の和になる.

注5: 正しい方法で得られた4章の結論と一致しているが, このような方法は一般には正当化できない.

参考文献

- (1) 小杉誠司「位置の測定装置における時間発展演算子」, 『淑徳短期大学紀要』第49号, 2010, p.1-11.
- (2) 小杉誠司「位置の測定装置における時間発展演算子Ⅱ」, 『淑徳短期大学紀要』第51号, 2012, p.1-11.
- (3) A. Messiah, "Quantum Mechanics", Dover Publications, 1999, p.651.
- (4) A. Messiah, 前掲書3), p.444.
- (5) J. von Neumann, "Mathematical Foundations of Quantum Mechanics", Princeton University Press, 1955.
- (6) Masanao Ozawa, "Position measuring interactions and the Heisenberg uncertainty principle", Phys. Lett. A299, 2002, p.1-7.
- (7) Masanao Ozawa, "Physical content of Heisenberg's uncertainty relation: limitation and reformulation", Phys. Lett. A318, 2003, p.21-29.