

最近の不確定性原理の 量子ビット検証実験は正しいか？

小 杉 誠 司

(2014年10月2日受理)

概 要

最近盛んにおこなわれている不確定性原理の検証実験では、 $\hat{x}_0^2 = 1$ であるオブザーバブル \hat{x}_0 の測定をおこない、 $\hat{X}_t^2 = 1$ であるプローブのオブザーバブル \hat{X}_t の測定値を \hat{x}_0 の測定値とみなしている。このように \hat{x}_0 の測定値を決めると、測定結果が3種類の奇妙な振舞いをするを理論的に明らかにした。対象の状態をいろいろ変えて、ある測定誤差で \hat{x}_0 を測定したとき、その測定値は全く同じ分布を示すので、これを測定と考えることはできない。実際の実験結果においてこのような振舞いをしていることを確認した。これに対して、偏りのない正確な測定の場合にはこのような奇妙な測定結果は出現しないことを示した。また偏りのない測定過程に対して成立する不確定性関係式を導出した。それは最近の検証実験で成立していることが確認されている Ozawa の不確定性関係式ではない。

キーワード 測定値演算子, 測定誤差, 擾乱, 不確定性関係, 偏りのない測定

1 はじめに

最近、量子測定における不確定性関係式の実験的検証が盛んにおこなわれ、その結果が学術誌に発表されている^{1) - 6)}。最初に、ウィーン工科大学の Erhart 等による中性子スピン $\hat{\sigma}_x$ を測定することによる検証が、『Nature Physics』に掲載された¹⁾。次に、東北大学のグループによる光子の偏光²⁾測定を用いた検証実験が、オンライン総合学術誌『Scientific Reports』に発表された²⁾。これらの検証では次のような結論を導いている：オブザーバブル \hat{x}_0 の測定誤差 $\epsilon(x_0)$ と \hat{x}_0 の測定が測定対象の別のオブザーバブル \hat{y}_0 に与える擾乱 (disturbance) $\eta(y_0)$ に関する Heisenberg の不確定性関係式⁷⁾

$$\epsilon(x_0)\eta(y_0) \geq \frac{1}{2} |\langle \phi_0 | [\hat{x}_0, \hat{y}_0] | \phi_0 \rangle| \quad (1)$$

は、一般に成立していない。ここで $|\phi_0\rangle$ は測定前の対象粒子の状態ベクトルである。これ

らの論文の著者の一人である Ozawa が以前に理論的に導出した不確定性関係式^{8), 9)}

$$\epsilon(x_0)\eta(y_0) + \epsilon(x_0)\sigma(y_0) + \sigma(x_0)\eta(y_0) \geq \frac{1}{2}|\langle\phi_0|[\hat{x}_0, \hat{y}_0]|\phi_0\rangle| \quad (2)$$

が常に成立している. ここで $\sigma(x_0)$, $\sigma(y_0)$ はそれぞれオブザーバブル \hat{x}_0 , \hat{y}_0 の標準偏差である.

更に東北大のグループは Ozawa の不等式を更に厳密にした Branciard の不等式¹⁰⁾ が成立していることを, 光子の偏光を弱測定 (weak measurement) した実験で明らかにした³⁾.

本論文ではこれらの検証実験の妥当性について考察する. 最初に, Erhalt 等の中性子スピンの測定結果について分析する. 彼らはスピン $\hat{\sigma}_z$ の測定結果を論文中に載せている. この結果を分析すると, 測定値が奇妙な振舞いをしていることがわかる. これは彼らの実験のミスではなく, 彼らの用いた測定値が正しくないために, 系統誤差が大きくなっていることが原因である.

位置測定について考察した前論文¹¹⁾ でも指摘したように, 相互作用後のプローブの演算子 \hat{X}_t の測定値をそのまま測定対象のオブザーバブル \hat{x}_0 の測定値とすることはできない. しかし最近の測定過程の不確定性関係式の検証実験^{1) - 6)} では, \hat{X}_t の測定値をそのまま \hat{x}_0 の測定値としている. 3章において理論的考察からプローブの演算子 \hat{X}_t の測定値を \hat{x}_0 の測定値とすると, 測定値が3つの奇妙な振舞いをするを明らかにする. 測定結果がこのような奇妙な振舞いをする測定は, 到底測定とみなすことはできないと筆者は考える.

5章では測定値がどのような条件を満たせば, このような奇妙な測定結果が出現しなくなるかを考察し, 測定値の平均と測定対象のオブザーバブル \hat{x}_0 の平均が等しい, いわゆる偏りのない (unbiased) 正確な (accurate) 測定であるための条件をもとめる. 6章において, 実際に偏りのない測定においては, 3章で出現した3つの奇妙な測定事象が現れないことを示す.

7章では偏りのない正しい測定過程が満たす不確定性関係式について考察する. 得られた不確定性関係式は, 既に位置測定の場合について論じた前論文^{12), 13)} で導出した不確定性関係式と同じである. Ozawa の不確定性関係式 (2) ではない.

2 Erhalt等による中性子スピン測定は測定といえるか?

ここでは Erhalt 等がおこなった中性子スピン測定¹⁾ の妥当性について考察する. 彼等が実際におこなっているのはオブザーバブル $\hat{\sigma}_x$ の測定ではなく, オブザーバブル $\hat{\sigma}_\phi = \cos\phi\hat{\sigma}_x + \sin\phi\hat{\sigma}_y$ (ϕ はパラメータ) の測定である. それを $\hat{\sigma}_x$ の測定とみなして $\hat{\sigma}_x$ の測定誤差 $\epsilon(x_0)$ を定義している:

$$\epsilon(x_0) = \langle\phi_0|\{\hat{\sigma}_\phi - \hat{\sigma}_x\}^2|\phi_0\rangle^{1/2} \quad (3)$$

不確定性関係についての Heisenberg の思考実験では, 測定誤差が生ずる原因はプローブの側にあつて, 測定対象の別のオブザーバブルを測定することによって測定誤差が生じる例は

ない。例えば有名な γ 線顕微鏡の例では、プローブである γ 線の波長を 0 に近づければ、測定誤差は 0 に近づく。

$\hat{\sigma}_\phi$ の測定値を $\hat{\sigma}_x$ の測定値とみなすことはできないと筆者は考える。このことを彼等の測定結果を吟味して明らかにする。ここでは 2 つの例を挙げる。 $\hat{\sigma}_\phi^2 = 1$ であるから測定値は ± 1 の 2 つである。測定値 $+1$ と -1 を得る確率をそれぞれ p_+ , p_- とすると、中性子スピンの初期状態が $|\phi_0\rangle = |+\ y\rangle$ で $\phi = 90^\circ$ の測定結果は $p_+ = 1$, $p_- = 0$ である。 $\phi = 90^\circ$ のとき $\hat{\sigma}_\phi = \hat{\sigma}_y$ であるから、このとき $p_+ = 1$ となるのは当然であって、実験の間違ひではない。しかし $p_+ = 1$ であるから、何回測定しても同じ測定値 $+1$ を得ることを意味している。常識的にはこのとき測定誤差 $\epsilon(x_0) = 0$ であり、中性子スピンは測定前に $|+\ x\rangle$ の状態にあったと予測するであろう。しかし $|+\ y\rangle = c_+|+\ x\rangle + c_-|-\ x\rangle$, $|c_+| = |c_-| = 1/\sqrt{2}$ であり、実際に $\epsilon(x_0) = 0$ のときの測定結果は $p_+ = 1/2$, $p_- = 1/2$ となっている。(この測定結果は 3 章の事象 C に相当している。)

さらにこのとき測定対象のオブザーバブル $\hat{\sigma}_x$ の標準偏差は $\sigma(\hat{\sigma}_x) = 1$ である。これに対して $\hat{\sigma}_\phi$ を測定値演算子としたときの測定値の標準偏差は $\sigma(\hat{\sigma}_\phi) = 0$ である。 $\phi = 90^\circ$ のとき $\epsilon = \sqrt{2}$ であるから、このとき測定値の標準偏差は増加すると考えるのが常識である。それが著しく減少して 0 になっている。(式 (15) を参照。) このような測定結果を出す測定は到底測定といえないのではないか？

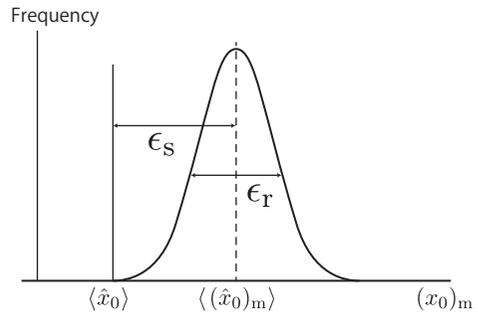


図1 系統誤差と偶然誤差

詳しく分析すると、系統誤差 ϵ_s が大きい

ことが、測定結果を合理的に理解できないことの原因であることがわかる。ここで $\sigma(\hat{x}_0) = 0$ のとき、 $\Delta \equiv \langle \phi_0, \xi_0 | (\hat{x}_0)_m | \phi_0, \xi_0 \rangle - \langle \phi_0 | \hat{x}_0 | \phi_0 \rangle$ としたとき系統誤差は

$$\epsilon_s = |\Delta| \tag{4}$$

である。ここで $(\hat{x}_0)_m$ は \hat{x}_0 の測定値を与える演算子である。また偶然誤差 (random error) を ϵ_r としたとき、測定誤差 ϵ は $\epsilon = \sqrt{\epsilon_r^2 + \epsilon_s^2}$ で与えられる。 ϵ_s は測定値が真の値にどの程度近いかを、すなわち測定値の正確度 (accuracy) を表している。 ϵ_r は測定値がどの程度の範囲にばらついているかを、すなわち精度 (precision) を表している。

もう一つの例を見てみよう。 $|\phi_0\rangle = |+\ z\rangle$ のときの測定結果である。このとき $\phi = 0^\circ$ すなわち $\epsilon(x_0) = 0$ のときの測定結果は、 $p_+ = 1/2$, $p_- = 1/2$ である。そして奇妙なことに、 $\phi = 40^\circ$ と $\phi = 90^\circ$ のときの測定結果も $\phi = 0^\circ$ のそれと全く同じ $p_+ = 1/2$, $p_- = 1/2$ である。 ϕ が大きくなると $\epsilon(x_0)$ は大きくなる。従ってこの結果は、同じ状態にある中性子の同じオブザーバブル $\hat{\sigma}_x$ を異なる測定誤差で測定したときの結果が、全く同じであることを示している。異なる測定誤差 $\epsilon(x_0)$ で測定したらその測定値の分布は違ってくると思うのが常識である。それが全く同じである。これも奇妙な測定結果である。(こ

の測定結果は3章の事象Bに相当している。) $|\phi_0\rangle = |-z\rangle$ のときの測定結果も $|\phi_0\rangle = |+z\rangle$ の場合と全く同じ奇妙な振舞いをしている. もう少し詳しく測定結果を分析してみると, $|+z\rangle = (|+x\rangle + |-x\rangle)/\sqrt{2}$ であるので, このときの測定結果は $|+x\rangle$ の測定結果と $|-x\rangle$ の測定結果の和になっている. 重みは1/2ずつである. $|+x\rangle$ の測定では, $p_+ = \cos^2(\phi/2)$, $p_- = \sin^2(\phi/2)$ であり, $|-x\rangle$ の測定では, $p_+ = \sin^2(\phi/2)$, $p_- = \cos^2(\phi/2)$ である. 従って測定誤差 $\epsilon(x_0)$ に関係なく, $|+z\rangle$ の測定結果は $p_+ = 1/2$, $p_- = 1/2$ となり, 上で述べた実験結果と一致している. このときの測定誤差は $\epsilon(x_0) = 2\sin(\phi/2)$ であるが, $|+x\rangle$ と $|-x\rangle$ の両方の測定において, 偶然誤差は $\epsilon_r = \sin(\phi/2)$, 系統誤差 $\epsilon_s = 1 - \cos\phi$ である. このように ϵ_r と ϵ_s はともに ϕ とともに増加しているが, $\phi = 40^\circ$ のとき $\epsilon_r = \sin 20^\circ \simeq 0.34$, $\epsilon_s = 1 - \cos 40^\circ \simeq 0.23$ であり, $\epsilon_s \simeq \epsilon_r$ であるから, このときすでに正確な測定をおこなっているとはいえない. $\phi = 90^\circ$ では更に状況は悪くなっている.

さらに $|\phi_0\rangle = |+x\rangle$ のときの測定値の平均と $|\phi_0\rangle = |-x\rangle$ のときの測定値の平均の差を考えると, $(\hat{x}_0)_m = \hat{\sigma}_\phi$ としたとき $\langle +x|\hat{\sigma}_\phi|+x\rangle - \langle -x|\hat{\sigma}_\phi|-x\rangle = \cos\phi - (-\cos\phi) = 2\cos\phi$ となる. $\phi = 0$ のときこれは2となり, 正しい値 $\langle +x|\hat{\sigma}_x|+x\rangle - \langle -x|\hat{\sigma}_x|-x\rangle = 2$ を再現しているが, $\phi = \pi/2$ のとき0となってしまう. すなわちこの測定値演算子では $\phi = \pi/2$ のとき測定値の平均の差を全く再現できていない. もちろん $|+x\rangle$ と $|-x\rangle$ を測定したときの系統誤差 ϵ_s が両方とも0であれば, このようなことは起きない.

系統誤差があっても較正によってそれを0にすることができる場合もある. Δ が任意の $|\phi_0\rangle$ に対して同じ値であるならば, 新しい測定値演算子を $(\hat{x}_0)_m - \Delta$ と再定義すれば, $\Delta = 0$ とすることができる. しかし測定値演算子を $\hat{\sigma}_\phi$ とした場合には, $|\phi_0\rangle = |+x\rangle$ のとき $\Delta = \cos\phi - 1$ であるが, $|\phi_0\rangle = |-x\rangle$ のとき $\Delta = 1 - \cos\phi$ であるので, 較正してすべての $|\phi_0\rangle$ に対して $\Delta = 0$ とすることができない. 以上のことよりオブザーバブル $\hat{\sigma}_x$ の測定値演算子として $\hat{\sigma}_\phi$ を採用することはできないことは明らかである.

3 $\hat{x}_0^2 = 1$ であるオブザーバブル \hat{x}_0 の測定

最近の不確定性原理の検証実験^{1)~6)} では, $\hat{x}_0^2 = 1$ であるオブザーバブル \hat{x}_0 の測定をおこなっているが, $\hat{X}_t^2 = 1$ であるオブザーバブル \hat{X}_t の測定値を \hat{x}_0 の測定値とみなしている. しかし $\hat{x}_0^2 = 1$ であるオブザーバブル \hat{x}_0 の測定において, 一般的に, $\hat{X}_t^2 = 1$ であるオブザーバブル \hat{X}_t を測定値演算子とすることはできない. このことをこの章で明らかにする.

相互作用後のプローブの演算子 \hat{X}_t の測定値より \hat{x}_0 の測定値を決定するのであるから, \hat{X}_t は \hat{x}_0 の関数でなければならない. 従ってこれを \hat{x}_0 の冪で展開すると, $\hat{x}_0^2 = 1$ であるから,

$$\hat{X}_t = \hat{I} \otimes g_0 + \hat{x}_0 \otimes g_1$$

とかける. ここで g_0 と g_1 はプローブの演算子の関数である. $\hat{X}_t^2 = 1$ のとき, $g_0 = 0$,

$g_1^2 = 1$ でなければならないので

$$\hat{X}_t = \hat{x}_0 \otimes \hat{\Sigma}_1, \quad \hat{\Sigma}_1^2 = 1 \quad (5)$$

とかける^{注2)}.

\hat{X}_t を測定値演算子とすると

$$\epsilon^2(x_0) = \langle \phi_0, \xi_0 | \{ \hat{X}_t - \hat{x}_0 \}^2 | \phi_0, \xi_0 \rangle = 2 \{ 1 - \langle \xi_0 | \hat{\Sigma}_1 | \xi_0 \rangle \} \quad (6)$$

となる. \hat{x}_0 と $\hat{\Sigma}_1$ の固有値方程式を

$$\hat{x}_0 | \pm \rangle = \pm | \pm \rangle, \quad \hat{\Sigma}_1 | \pm \Sigma \rangle = \pm | \pm \Sigma \rangle \quad (\text{複号同順})$$

とすると, 初期状態の状態ベクトルは

$$| \phi_0 \rangle = c_+ | + \rangle + c_- | - \rangle, \quad (7)$$

$$| \xi_0 \rangle = d_+ | + \Sigma \rangle + d_- | - \Sigma \rangle \quad (8)$$

と展開できる. ここで c_{\pm} , d_{\pm} は複素数の定数である. このとき $\langle \xi_0 | \hat{\Sigma}_1 | \xi_0 \rangle = |d_+|^2 - |d_-|^2$ となる. また測定値が ± 1 をとる確率は式 (5) より^{注3)}

$$p_+ = |c_+|^2 |d_+|^2 + |c_-|^2 |d_-|^2, \quad (9)$$

$$p_- = |c_+|^2 |d_-|^2 + |c_-|^2 |d_+|^2. \quad (10)$$

以上のことから, 次のことが明らかとなる:

A. $|d_+|^2 = |d_-|^2 = 1/2$ のとき, c_+ と c_- の値にかかわらず, 測定結果は $p_+ = p_- = 1/2$ となる. このとき式 (6) より $\epsilon(x_0) = \sqrt{2}$ である. 従ってこのとき任意の $| \phi_0 \rangle$ に対して, 測定結果が全く同じ $p_+ = p_- = 1/2$ となる. \hat{x}_0 の量子測定とは対象の状態 $| \phi_0 \rangle$ がどのような状態であるかを明らかにすることである. すなわち \hat{x}_0 の固有値とその固有値をとる確率 $|c_+|^2$ と $|c_-|^2$ を予測することである^{注4)}. しかしすべての $| \phi_0 \rangle$ に対して測定値が同じ分布を示すのであれば, これらの情報を得ることはできないから, これは明らかに測定ではない.

B. $|c_+|^2 = |c_-|^2 = 1/2$ のとき, d_+ と d_- の値にかかわらず, 測定結果は $p_+ = p_- = 1/2$ となる. $| \xi_0 \rangle$ を変えることによって, すなわち d_+ と d_- の値を変えることによって測定誤差 $\epsilon(x_0)$ は 0 から 2 に変化するが, このとき測定結果は全く同じ $p_+ = p_- = 1/2$ となる. 同じ状態にある対象の同じオブザーバブルを測定したとき, 測定誤差 $\epsilon(x_0)$ をいろいろ変えたときの測定値の分布が全く同じであるということは, 測定誤差の意味を考えたときに理解することができない^{注5)}.

C. $|c_-|^2 = 1$ かつ $|d_-|^2 = 1$ のとき, $p_+ = 1$, $\epsilon(x_0) = 2$ となる. $p_+ = 1$ であるから, このとき同じ測定を何回繰り返しても測定結果は常に $+1$ である. この結果から常識的には $| \phi_0 \rangle = | + \rangle$ かつ $\epsilon(x_0) = 0$ と判断するが, 実際には, $| \phi_0 \rangle = | - \rangle$ かつ $\epsilon(x_0) = 2$ となっている. $|c_+|^2 = 1$ かつ $|d_-|^2 = 1$ のときも同様なことが起きている. すなわちこのと

き測定結果は常に -1 であるが、実際には、 $|\phi_0\rangle = |+\rangle$ かつ $\epsilon(x_0) = 2$ となっている。このような測定結果が出ることは、常識的には考えられない。 $\sigma(x_0) = 0$ かつ $\sigma(X_t) = 0$ であるから $\sigma(\Sigma_1) = 0$ である。このときには、必ず $\epsilon(x_0) = 0$ となるように測定値演算子を定義することができる。そうならないのは測定値演算子が間違っているからである。

2章で述べた Erhalt 等による中性子スピンの測定実験では、上で述べた測定事象 B と C が現れることを確認していた。しかし測定事象 A は彼等の検証実験では現れていない。これは次の章で明らかになるように、彼等の論文では $\hat{\sigma}_x$ の測定値と \hat{X}_t の測定値が同じであると仮定していたが、この仮定が正しくないことが原因であると考えられる。

4 $\hat{\sigma}_\phi$ の測定値を \hat{X}_t の測定値とみなすことはできない

Erhalt 等の論文では、式 (3) の測定誤差は引用文献 (14) の式 (52) より導出できるとしている。引用文献 (14) の式 (52) では相互作用後のプローブのオブザーバブル \hat{X}_t の測定結果より対象粒子のオブザーバブル \hat{x}_0 の測定値を求めている。Ozawa は引用文献 (14) でオブザーバブル $\hat{\sigma}_x$ の測定が射影測定 (projective measurement) になることがあることを証明しているが、それが $\hat{\sigma}_\phi = \cos\phi\hat{\sigma}_x + \sin\phi\hat{\sigma}_y$ の射影測定になることを証明していない。ただ仮定しているだけである。Erhalt 等が中性子スピン $\hat{\sigma}_x$ の測定結果が Ozawa の不確定性関係式の成立を証明していると主張するためには、 $\hat{\sigma}_\phi$ が $\cos\phi\hat{\sigma}_x + \sin\phi\hat{\sigma}_y$ となる具体的なユニタリ変換 \hat{U} とプローブの状態 $|\xi_0\rangle$ が存在することを示さなければならない。もし実際にそのような \hat{U} と $|\xi_0\rangle$ が存在することが示されれば、 $\hat{\sigma}_x$ の測定は $\hat{\sigma}_\phi$ の射影測定と同値であるから、実験結果は Ozawa の不確定性関係式 (2) の成立を証明したことになる。

Erhalt 等の論文では、 \hat{X}_t の測定値を求める代わりに $\hat{\sigma}_\phi$ の測定値を求め、それを \hat{X}_t の測定値になると仮定していた。このことの妥当性を 3章で展開した理論を用いてここで考察する。Erhalt 等の論文では、 $\phi = 90^\circ$ のとき、 $\epsilon(x_0) = 2\sin(\phi/2) = \sqrt{2}$ であり、このとき $\hat{\sigma}_\phi = \hat{\sigma}_y$ となる。従って 2章で指摘したように、 $|\phi_0\rangle = |+y\rangle$ のときの $\hat{\sigma}_\phi$ の測定値は $+1$ 、 $|\phi_0\rangle = |-y\rangle$ のときの測定値は -1 である。しかし 3章の考察では、 $\epsilon(x_0) = \sqrt{2}$ のとき $\langle \xi_0 | \hat{\Sigma}_1 | \xi_0 \rangle = 0$ であるから、 $|d_+|^2 = |d_-|^2 = 1/2$ となる。このとき 3章でも指摘したように、任意の $|\phi_0\rangle$ に対して \hat{X}_t の測定値の分布は $p_+ = p_- = 1/2$ となる。

以上のことより、 $|\phi_0\rangle = |\pm y\rangle$ のときの $\hat{\sigma}_\phi$ の測定値の分布と \hat{X}_t の測定値の分布は違っているから、任意の $|\phi_0\rangle$ に対して $\hat{\sigma}_\phi$ の測定値を \hat{X}_t の測定値とみなすことはできない。従って Erhalt 等の仮定は妥当性を欠いている。

6

5 測定値演算子の条件

2章での Erhalt 等の測定結果の分析は、偏りのない正確な測定でなければ測定結果を合理的に理解できないことを示している。ここでは偏りのない測定であるために、測定値演算子が満たさなければならない条件について考察する。

\hat{x}_0 の測定を考える. 簡単のために $\sigma(x_0) = 0$ とし, $\hat{x}_0|\phi_0\rangle = \bar{x}_0|\phi_0\rangle$ とする. このときの測定誤差の2乗は

$$\epsilon^2(x_0) = \langle \phi_0, \xi_0 | \{(\hat{x}_0)_m - \hat{x}_0\}^2 | \phi_0, \xi_0 \rangle \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &= \langle \xi_0 | \{(\hat{x}_0)_m - \langle (\hat{x}_0)_m \rangle\}^2 | \xi_0 \rangle + \{ \langle (\hat{x}_0)_m \rangle - \bar{x}_0 \}^2 \\ &= \sigma^2((x_0)_m) + \epsilon_s^2(x_0). \end{aligned} \quad (12)$$

ここで $|\langle (\hat{x}_0)_m \rangle - \bar{x}_0|$ は系統誤差 $\epsilon_s(x_0)$, $\langle (\hat{x}_0)_m \rangle$ は測定値の平均, $\sigma((x_0)_m)$ は測定値の標準偏差であり偶然誤差 $\epsilon_r(x_0)$ に相当している. 図1からわかるように, 測定が正確であるためには, $\epsilon_s(x_0) = 0$ でなければならない. これより

$$\langle \xi_0 | (\hat{x}_0)_m | \xi_0 \rangle = \bar{x}_0.$$

この式は任意の \bar{x}_0 に対して成立していなければならないから,

$$\langle \xi_0 | \{(\hat{x}_0)_m - \hat{x}_0\} | \xi_0 \rangle_\kappa = 0. \quad (13)$$

ここで κ はプローブの変数についての積分を意味している. このとき任意の $|\phi_0\rangle$ に対して

$$\langle \phi_0, \xi_0 | (\hat{x}_0)_m | \phi_0, \xi_0 \rangle = \langle \phi_0 | \hat{x}_0 | \phi_0 \rangle \quad (14)$$

が成立する. 式 (13) が偏りのない正確な測定であるための条件式である. 偏りのない測定については, これまでも議論されてきている. しかし筆者がここで主張しているのは, 任意の $|\phi_0\rangle$ に対して偏りのない測定になるように測定値演算子を定義しなければならないということである. 前論文¹⁵⁾でも指摘したが, これまでの量子測定理論では測定値演算子をどのように定義するかについて全く議論されていない. ある適当なプローブのオブザーバブル \hat{X}_0 をメーター・オブザーバブルと考え, 相互作用後のこのオブザーバブル \hat{X}_t を測定値演算子と仮定しているだけである. これでは正しい量子測定理論とはいえない.

Erhalt等の測定値演算子に上の条件を適用すると $\phi = 0$ を得る. すなわち $\hat{\sigma}_\phi = \hat{\sigma}_x$ のときに正確な測定をおこなっていることがわかる. $\hat{x}_0 = \hat{\sigma}_x$ であるから, これは当たり前の結果である. 偏りのない正確な測定というのは測定誤差 $\epsilon(x_0) = 0$ である測定を意味しているのではなく, 系統誤差が0である測定のことである. ϵ_r が大きくても系統誤差が0であれば偏りのない正確な測定である.

6 偏りのない測定の測定結果

7

偏りのない正確な測定では, 3章で予測した奇妙な測定事象 A, B, C が出現しないことを本章で示す. 筆者の考えでは, 測定結果に事象 A, B, C が出現したとき, その測定は到底測定とみなすことはできない.

偏りのない測定では式 (13) が成立しているので,

$$\sigma^2((x_0)_m) = \sigma^2(x_0) + \epsilon^2(x_0) \quad (15)$$

が常に成立していることを容易に示すことができる。

3章の式 (7) より $|c_+|^2$, $|c_-|^2$ が変われば, 標準偏差 $\sigma(x_0) = (|c_+|^2 - |c_-|^2)^{1/2}$ も変わるのて, 測定誤差を一定にしていろいろな状態 $|\phi_0\rangle$ にある対象のオブザーバブル \hat{x}_0 を測定したとき, 式 (15) より $\sigma((x_0)_m)$ も変わる. 従って偏りのない測定では測定誤差 $\epsilon(x_0)$ を一定にして, いろいろな状態にある対象のオブザーバブル \hat{x}_0 を測定したとき, 測定値の分布は変化するので測定事象 A は現れない.

ある状態にある対象粒子のオブザーバブル \hat{x}_0 を測定誤差 $\epsilon(x_0)$ を変えて測定したとき, 式 (15) より $\sigma((x_0)_m)$ が変わるので, 測定値の分布は変化する. 従って測定事象 B が出現することはない.

\hat{x}_0 の測定値が常に同じであるとき $\sigma((x_0)_m) = 0$ であるから, 式 (15) より測定誤差 $\epsilon(x_0) = 0$ かつ $\sigma(x_0) = 0$ でなければならない. よって偏りのない測定では測定事象 C が現れることはない.

以上のことから, 偏りのない測定では, 3章で指摘した奇妙な測定結果 A, B, C は生じないことがわかる.

7 偏りのない正しい測定が満たす不確定性関係式

Ozawaの不確定性関係式を検証したこれまでの実験には, 問題があることを明らかにした. それらの実験では正しい測定値を用いていないために, その測定結果は奇妙な振舞いをするを明らかにした. 筆者の考えでは, それは測定ではないので, Ozawaの不等式は実験によって検証されていない. Ozawaの不等式の検証実験が明らかにしたことは, 測定と呼べない測定に対しても Ozawaの不等式が成立していることであると筆者は考える.

このことは次のように理論的にも明らかにすることができる. Ozawaはこの不等式を, \hat{x}_0 の測定値演算子 $(\hat{x}_0)_m$ がプローブの相互作用後の演算子 \hat{X}_t であるという仮定と, 交換関係式の算術のみを用いて導出している. 前論文^{11), 12)} で指摘したように, 筆者の理論では $(\hat{x}_0)_m = \hat{X}_t$ ではなく $(\hat{x}_0)_m = f(\hat{X}_t)$ である. 関数 f は時間発展演算子 \hat{U} によって決定される. \hat{X}_t の代わりに $(\hat{x}_0)_m = f(\hat{X}_t)$ としても, Ozawaの不等式が成立することが, Ozawaの導出法を用いることによって容易にわかる. 従って $(\hat{x}_0)_m$ が正しい測定値を与える演算子であると仮定すると, 式 (11) で定義された $\epsilon(x_0)$ が式 (2) の不確定性関係を満たしている. しかし, このとき新しい演算子 $\gamma_1(\hat{x}_0)_m + \gamma_2\hat{I}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in R$ を測定値演算子として定義し, それを用いた新しい測定誤差 $\epsilon'(x_0) = \langle \phi_0, \eta_0 | \{ \gamma_1(\hat{x}_0)_m + \gamma_2\hat{I} - \hat{x}_0 \}^2 | \phi_0, \eta_0 \rangle^{1/2}$ を用いても式 (2) の不確定性関係は成立している. この新しい演算子は正しい測定値を γ_1 倍し, 更にそれに定数 γ_2 を加えたものを測定値とみなすことに相当する. γ_1 と γ_2 は任意の実数である. ただしすべての測定値に対して同じ操作をおこなう必要がある. $(\hat{x}_0)_m$ が正しい測定値を与える演算子であるとき, $\gamma_1(\hat{x}_0)_m + \gamma_2\hat{I}$, $\gamma_1 \neq 1, \gamma_2 \neq 0$

は明らかに正しい測定値を与えないから、このことは正しくない測定値演算子に対しても式 (2) が成立していることを示している。例えば東京で電子の位置測定をした場合を想定すると、 γ_2 として東京とニューヨークの距離に相当する定数を当てても、Ozawaの不確定性関係式 (universally valid uncertainty relation) は成立する。すなわちOzawaの式 (2) は too universalである。以上の考察は正しい測定値演算子が満たす不等式は不等式 (2) とは違っているということを示している。

次に偏りのない正確な測定をしたときに、その測定値が満たす不確定性関係式を明らかにする。5章で明らかにしたように、偏りのない正確な測定では式 (13) が成立していなければならない。式 (13) を用いると、不確定性関係式

$$\sigma((x_0)_m)\eta(y_0) \geq \frac{1}{2} |\langle \phi_0 | [\hat{x}_0, \hat{y}_0] | \phi_0 \rangle| \quad (16)$$

が成立していることがわかる。

さらに

$$\begin{aligned} \epsilon(x_0)\eta(y_0) &\geq \frac{1}{2} |\langle \phi_0, \xi_0 | [(\hat{x}_0)_m - \hat{x}_0, \hat{y}_t - \hat{y}_0] | \phi_0, \xi_0 \rangle|, \\ \sigma(x_0)\eta(y_0) &\geq \frac{1}{2} |\langle \phi_0, \xi_0 | [\hat{x}_0, \hat{y}_t - \hat{y}_0] | \phi_0, \xi_0 \rangle| \end{aligned}$$

が成立しているのです、これらと式 (13) を用いると不確定性関係式

$$\{\epsilon(x_0) + \sigma(x_0)\}\eta(y_0) \geq \frac{1}{2} |\langle \phi_0 | [\hat{x}_0, \hat{y}_0] | \phi_0 \rangle| \quad (17)$$

が成立していることがわかる。Ozawaの不等式 (2) と比較すると、 $\sigma(x_0)\eta(y_0)$ の項がないことがわかる。 $(\hat{x}_0)_m$ が不確定性関係 (16), (17) を満たすとき、 $\gamma_1(\hat{x}_0)_m + \gamma_2\hat{I}$, $\gamma_1 \neq 1, \gamma_2 \neq 0$ は不確定性関係 (16), (17) を満たさない。これは偏りのない正確な測定の条件式 (13) があるためである。

またこのとき式 (15) より

$$\epsilon(x_0) + \sigma(x_0) \geq \sigma((x_0)_m)$$

であるから、不確定性関係式 (16) が関係式 (17) よりも基本的な、強い不等式であることがわかる。

不確定性原理の検証実験^{1) - 6)}では相互作用前のオブザーバブル \hat{x}_0 の測定だけを考えているが、次に相互作用後の対象粒子のオブザーバブル \hat{x}_t の測定について考える。前論文^{16), 17)}で考察したように、自由粒子の移動距離を測定し、その間に重力波が到来したかどうかを検出する測定装置では、相互作用前の粒子のオブザーバブル \hat{x}_0 だけでなく、相互作用後の粒子のオブザーバブル \hat{x}_t を測定する必要がある。

\hat{x}_0 の測定の場合と同様に考えると, 任意の $|\phi_0\rangle$ に対して \hat{x}_t の測定が偏りがなく正確であるための条件は

$$\langle \xi_0 | \{ (\hat{x}_t)_m - \hat{x}_t \} | \xi_0 \rangle_\kappa = 0 \quad (18)$$

である. ここで $(\hat{x}_t)_m$ は \hat{x}_t の測定値演算子である. $(\hat{x}_t)_m$ も \hat{X}_t の測定値を用いて決定するので \hat{X}_t の関数である. よって $[(\hat{x}_t)_m, \hat{y}_t] = 0$. さらに式 (18) を用いると不確定性関係式

$$\epsilon(x_t)\eta(y_0) \geq \frac{1}{2} |\langle \phi_0, \xi_0 | [\hat{x}_t, \hat{y}_t] | \phi_0, \xi_0 \rangle| \quad (19)$$

が成立していることがわかる.

\hat{x}_0, \hat{y}_0 がそれぞれ位置演算子, 運動量演算子のとき, $[\hat{x}_t, \hat{y}_t] = \hat{U}^\dagger [\hat{x}_0, \hat{y}_0] \hat{U} = i\hbar$ となるので, 式 (19) は

$$\epsilon(x_t)\eta(y_0) \geq \frac{\hbar}{2} \quad (20)$$

となる.

不確定性原理の検証実験をおこなっている論文¹⁾⁻⁶⁾では, 量子測定のHeisenbergの不確定性関係を不等式 (1) とみなし, 実験では不等式 (1) は成立していないと批判している. 不等式 (1) が一般に成立しないことは筆者も認めるが, 前論文^{12), 13)}ですでに指摘しているように, 不等式 (1) はHeisenbergが主張した不確定性関係ではない. Heisenbergは, 量子測定の不確定性関係式は測定後の対象の状態について記述していると述べている¹⁹⁾. 前論文^{16), 17)}で明らかにしたように, 測定後の対象の状態を決めているのは測定誤差 $\epsilon(x_0)$ ではなく $\epsilon(x_t)$ であるから, 関係式 (1) ではなく, 関係式 (19) を量子測定のHeisenbergの不確定性関係式と解釈すべきである. 従ってHeisenbergの不確定性関係式は成立している.

8 まとめと考察

Erhalt等の測定結果¹⁾を分析すると, 彼らの中性子スピンの測定が測定とみなせないことがわかった. 彼らがこのような測定結果を得たのは, 実験に間違いがあったためではなく, 測定値を与える演算子が正しくないことがその原因である. このような測定値に対しても Ozawaの不確定性関係式 (2) が成立していることを彼らは証明したのであるが, まさにこのことが筆者がOzawaの不確定性関係式を正しい不確定性関係式と認めない理由である. また7章において, 理論的にもOzawaの不確定性関係式 (2) が正しくない測定に対しても成立していることを明らかにした.

Erhalt等は2重に間違いをしていると筆者は考える. 最初の間違いは \hat{X}_t を \hat{x}_0 の測定値演算子としているところである. 3章で理論的に明らかにしたように, $\hat{x}_0^2 = 1$ であるオブ

ザーバブル \hat{x}_0 の測定において $\hat{X}_t^2 = 1$ であるプローブのオブザーバブル \hat{X}_t を測定値演算子とすることはできない. 2 番目の間違いは $\hat{\sigma}_\phi$ の測定値は \hat{X}_t の測定値と等しいとみなしていることである. 4 章で明らかにしたように, 測定対象の任意の初期状態 $|\phi_0\rangle$ に対して, $\hat{\sigma}_\phi$ の測定値の分布と \hat{X}_t の測定値の分布は同じではないので, この仮定は間違っている.

筆者は既に測定値演算子をどのように定義するかについて, 予備的な議論をおこなっている¹²⁾. 相互作用後の対象粒子とプローブの演算子 \hat{x}_t , \hat{X}_t が, 相互作用前のそれらの演算子 \hat{x}_0 , \hat{X}_0 の関数で与えられるとする:

$$\hat{x}_t = f(\hat{x}_0, \hat{X}_0), \quad (21)$$

$$\hat{X}_t = g(\hat{x}_0, \hat{X}_0). \quad (22)$$

ここで $f(x, y)$, $g(x, y)$ は任意の関数である. ここで \hat{x}_0 が一つの値しかとらない場合を考えると, 式 (22) より \hat{x}_0 の測定値が誤差を持つのは, プローブのオブザーバブル \hat{X}_0 の値にゆらぎがあるためであることがわかる. ゆらぎがないとき \hat{X}_t は一つの値しかとらないから, 誤差は 0 である. ある測定でプローブのどの X_0 成分と対象粒子が相互作用するかを, 我々は知ることができないしコントロールすることもできないので, \hat{X}_0 を $\langle \hat{X}_0 \rangle$ と置いたときの \hat{x}_0 を \hat{x}_0 の測定値演算子とするのが合理的である. このような考察から, 測定値演算子を次の変換によって定義した:

$$\hat{x}_0 \rightarrow (\hat{x}_0)_{\text{exp}}, \quad \hat{x}_t \rightarrow (\hat{x}_t)_{\text{exp}}, \quad \hat{X}_0 \rightarrow \langle \hat{X}_0 \rangle \hat{I}.$$

すなわち

$$(\hat{x}_t)_m = f((\hat{x}_0)_m, \langle \hat{X}_0 \rangle), \quad (23)$$

$$\hat{X}_t = g((\hat{x}_0)_m, \langle \hat{X}_0 \rangle). \quad (24)$$

線形性の仮説が成立している場合には, この方法でもとめた測定値演算子 $(\hat{x}_0)_m$ と $(\hat{x}_t)_m$ は偏りのない測定の条件式 (13), (18) を満たしていることがわかる^{12), 13)}. また 3 章で考察した測定でも, 式 (5) を用いて上で述べた方法によって測定値演算子をもとめると, $(\hat{x}_0)_m = \hat{x}_0 \otimes \hat{\Sigma}_1 / \langle \xi_0 | \hat{\Sigma}_1 | \xi_0 \rangle$ を得るが, これもまた偏りのない測定の条件式 (13) を満たしていることがわかる^{注6)}. さらに一般的に, \hat{x}_0 の測定誤差 $\epsilon(x_0)$ が最小値をとるように $(\hat{x}_0)_m$ を定義すると, その演算子は偏りのない測定の条件式 (13) を満たしている. $(\hat{x}_t)_m$ についても同様に測定誤差 $\epsilon(x_t)$ が最小値をとるように定義すると, 条件式 (18) を満たしていることがわかっている¹⁸⁾.

測定誤差 $\epsilon(x_0)$ はその定義式 (11) からわかるように測定値演算子 $(\hat{x}_0)_m$ の関数であるから, その値は明らかに測定値演算子に依存している. しかし \hat{y}_0 の擾乱は測定の時間発展演算子 \hat{U} に依存しているが, 測定値演算子 $(\hat{x}_0)_m$, $(\hat{x}_t)_m$ の関数形には全く依存していない. Ozawa の不等式 (2) の場合には, 他に測定対象粒子の初期状態の標準偏差 $\sigma(x_0)$, $\sigma(y_0)$ も現れるが, それらも測定値演算子の関数形には依らない. 従って測定誤差 $\epsilon(x_0)$ が最小値をとるときに成立する不等式が, 測定過程の不確定性関係式でなければならない. よ

って Ozawa の不等式 (2) ではなく、本論文でもとめた不確定性関係式 (16), (17), (19) が測定過程で成立している不確定性関係式である。

測定誤差が 0 ではない測定の場合、測定値と測定対象の実際の値とが異なっているのは当然である。このような測定に対して、測定値演算子の正しさをどのような基準で判定するのかが、問題となる。筆者は偏りのない測定のみを測定とみなすべきであると考え、偏りのない測定に対して不確定性関係式 (16) が成立していることは、Ozawa がすでに示している⁹⁾。しかし Ozawa は偏りのない測定を数ある測定の中の一つの特別な場合と考えている。本論文で筆者が明らかにしたことは、偏りのない正確な測定のみを測定とみなすべきであるということである。そうでない測定すなわち系統誤差が大きい測定は、本論文で明らかにしたように不合理な測定結果をもたらすからである。6 章で明らかにしたように、偏りのない正確な測定はこのような不合理な測定結果をもたらすことはない。

本論文で考察したことは、測定とは何かという問題を提起しているように思える。測定値を得たからといって、それは測定ではない。得られた測定値から意味のある情報を引き出すことができ始めてそれは測定といえる。測定とは測定対象に関する情報を得ることであるが、測定結果が示す対象の情報は直感的に理解できるものでなければならない。本論文でおこなった中性子スピンの測定結果の詳細な分析は、そのためには系統誤差が 0 になるように、測定値演算子を定義しなければならないことを示している。実際の実験では、一般に様々な要因から系統誤差を 0 にすることができないといわれている。しかし理論的には、測定誤差が 0 となるように測定値演算子を定義すべきである。

この研究にあたり、筆者は 1926 年春のベルリンの物理コロキウムで Einstein が Heisenberg に言った次の言葉を思い出していた：「理論があって始めて、人が何を観測できるかが決まるのですよ。」自身の行列力学の理論と霧箱に現れる観測粒子の軌跡の矛盾に思い悩んでいた Heisenberg は、問題の解決がこの言葉の中にあると感じたという²⁰⁾。しかし理論がある実験結果を予測し、実験が理論の予測した結果を示したとしても、その理論の正しさを必ずしも証明していない。最近の不確定性原理の実験的検証はこのことの一つの例になっていると筆者は思う。

注

注 1：1 つの光子の偏光状態は中性子のスピン状態と同様に 2 つの状態をとるので、量子ビット (qubit) としても利用されている。

12 注 2： $\hat{\Sigma}_1 = \hat{I}$ の場合、すなわち $\hat{X}_t = \hat{x}_0$ の場合もあるが、このとき測定誤差は常に 0 になるので、ここでは考えていない。東北大学のグループによる光子の偏光実験では、 \hat{X}_t は式 (5) で与えられている²⁾。ただし $\hat{\Sigma}_1 = \sin 2\theta \hat{\Sigma}_x + \cos 2\theta \hat{\Sigma}_z$, ($0 \leq \theta \leq \pi/4$) である。ここで $\hat{\Sigma}_x$ 等はパウリ演算子である。

注 3： $\hat{U}|\phi_0, \xi_0\rangle = c_+ d_+ |+\rangle \otimes |X_0 = +1\rangle + c_+ d_- |+\rangle \otimes |X_0 = -1\rangle + c_- d_+ |-\rangle \otimes |X_0 = +1\rangle + c_- d_- |-\rangle \otimes |X_0 = -1\rangle$ が成立しているので、式 (9) 及び (10) が成立していることがわかる。ここで $\hat{X}_0 |X_0 = \pm 1\rangle = \pm |X_0 = \pm 1\rangle$ である。

注 4：今考察している測定値演算子 \hat{X}_t では測定値は正しい値 ± 1 をとるので、測定値が ± 1 をとる

確率 p_{\pm} が問題となる.

注5 : 東北大学のグループによる偏光実験²⁾ では, $|\phi_0\rangle = |+y\rangle$ としている. 従って論文中にそのような記述はないが, 測定誤差をいろいろ変えて測定した結果は, すべて同じ分布 $p_+ = p_- = 1/2$ を示しているはずである.

注6 : この場合には, 式 (22) の右辺は \hat{x}_0 と \hat{X}_0 の関数ではなく, \hat{x}_0 と $\hat{\Sigma}_1$ の関数になっている. より一般性があるのは \hat{x}_0 と $\hat{\Sigma}_1$ の関数の場合である.

引用文献

- (1) Jacqueline Erhart, Stephan Sponar, Georg Sulyok, Gerald Badurek, Masanao Ozawa, Yuji Hasegawa, Nature Physics **8**, 185 (2012)
- (2) S.-Y. Baek, F. Kaneda, M. Ozawa, and K. Edamatsu, Sci. Rep. **3**, 2221 (2013)
- (3) F. Kaneda, S.-Y. Baek, M. Ozawa, and K. Edamatsu, Phys. Rev. Lett. **112**, 020402 (2014) .
- (4) L. A. Rozema, A. Darabi, D. H. Mahler, A. Hayat, Y. Soudagar, and A. M. Steinberg, Phys. Rev. Lett. **109**, 100404 (2012) .
- (5) M. M. Weston, M. J. W. Hall, M. S. Palsson, H. M. Wiseman, and G. J. Pryde, Phys. Rev. Lett. **110**, 220402 (2013) .
- (6) M. Ringbauer, D. N. Biggerstaff, M. A. Broome, A. Fedrizzi, C. Branciard and A. G. White Phys. Rev. Lett. **112**, 020401 (2014) .
- (7) W. Heisenberg, Z. Phys. **43** (1927) , 172.
- (8) M. Ozawa, Phys. Rev. A **67** (2003) , 042105.
- (9) M. Ozawa, Ann. of Phys. **311** (2004) , 350.
- (10) C. Branciard, Proc. Natl. Acad. Sci. **110** (2013) , 6742.
- (11) 小杉誠司 「Heisenbergの不確定性原理における位置測定の誤差」, 『淑徳短期大学紀要』第48号, 2009, p.155-166.
- (12) S. Kosugi, Prog. Theor. Phys. **123**, 431 (2010) .
- (13) 小杉誠司 「Heisenbergの不確定性原理における位置の測定値の不確定性」, 『淑徳短期大学紀要』第50号, 2011, p.145-158.
- (14) M. Ozawa, J. Opt. B:Quantum and Semiclass. Opt. **7**, S672 (2005) .
- (15) 小杉誠司 「位置の測定装置における時間発展演算子」, 『淑徳短期大学紀要』第51号, 2012, p.1-11.
- (16) 小杉誠司 「自由粒子の移動距離の測定における標準量子限界」, 『淑徳短期大学紀要』第52号, 2013, p.197-210.
- (17) S. Kosugi, Phy. Rev. A **82**, 022118 (2010) .
- (18) 投稿予定.
- (19) W. Heisenberg, "The physical principles of the quantum theory", Dover Publications, 1949. ハイゼンベルグ, 玉木英彦・遠藤真二・小出昭一郎訳 『量子論の物理的基礎』, みすず書房, 1954.
- (20) M. Jammer, "The Philosophy of Quantum Mechanics-The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective" , John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974, p57. 井上健訳, 『量子力学の哲学 上』, 紀伊国屋書店, 1983, p73.