量子測定理論における測定値

小　杉　誠　司

（2015年10月14日受理）

概　要

測定対象の相互作用前のオブザーバブル $\hat{x}_0$ と相互作用後のオブザーバブル $\hat{x}_t$ の測定値を，測定誤差が最小になるように定義し，理論的測定値を得た．偏りのある測定では，測定値が奇妙な振舞いをすることがあるが，理論的測定値を用いた測定は常に偏りのない測定となる．しかし理論的測定値は測定対象の初期状態に依存しているので，初期状態がわからなければ実際に理論的測定値を求めることはできない．そこで初期状態についての情報が全く無い場合に使用すべき測定値を，理論的測定値から求め，それを実践的測定値と名付けた．

プローブの初期状態を式 (1) の $|\Sigma_0\rangle$（固有値が連続の場合）に，あるいは式 (25) の $|\Sigma_j\rangle$（固有値が離散的な場合）に設定すると，測定誤差を０にすることができる．このとき理論的測定値及び実践的測定値を用いたときには，測定対象の任意の初期状態に対して，Bornの確率則を再現するが，Ozawaの測定値を用いたときには，任意の初期状態に対してBornの確率則を再現しない．

キーワード　測定誤差，理論的測定値，実践的測定値，偏りのない測定，ボルンの確率則

1　はじめに

量子測定理論において，測定値をどのように決定するかという議論はほとんどおこなわれていない．通常ではプローブの相互作用後のあるオブザーバブル $\hat{X}_t$ の測定値 X を測定対象のオブザーバブル $\hat{x}_0$ の測定値とみなしている．位置測定について考察した前論文Ⅰ[1] 及びⅡ[2] では，相互作用後のプローブの位置演算子 $\hat{X}_t$ の測定値をそのまま測定対象のオブザーバブル $\hat{x}_0$ の測定値とすることはできないことを明らかにした．さらに前論文Ⅲ[3]において，最近の測定過程の不確定性関係式の検証実験[4)−8)] では，$\hat{X}_t^2 = 1$ を満たすプローブのある演算子 $\hat{X}_t$ の測定値をそのまま $\hat{x}_0$ の測定値とみなしているが，プローブの演算子 $\hat{X}_t$ の測定値を $\hat{x}_0$ の測定値とすると，これらの検証実験の測定値が次のような３つの奇妙な振舞いをすることを，理論的考察から明らかにした：

1

事象Ａ：ある測定誤差 $\epsilon(x_0)$ で測定をしたとき，対象のすべての初期状態 $|\phi_0\rangle$ に対して，測定結果が全く同じになる．

事象Ｂ：ある初期状態 $|\phi_0\rangle$ に対して測定誤差を変えて測定したとき，測定結果が全く同じになる．

事象Ｃ：同じ条件で測定を繰り返したとき，常に同一の測定結果が得られる場合がある．常識的にはこのとき初期状態 $|\phi_0\rangle$ は測定したオブザーバブルの固有状態にあり，測定誤差は０であると考えられるが，実際にはそうなっていない．

前論文Ⅲでは測定結果がこのような奇妙な振舞いをする測定を，到底測定とみなすことはできないと結論した．そしてこれらの不合理な事象が起きる原因は，測定値が正しくないこと，そのため系統誤差が大きくなり，偏りのある測定になっていることにあると指摘した．

測定誤差 $\epsilon(x_0)$ は測定値を与える演算子 $(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}$ に依存している．従って測定値演算子 $(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}$ をどのように定義するかによって誤差の大きさは違ってくる．一つの例を挙げると，電子の位置測定において，Ozawa は $(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}} = \hat{X}_t$ として，$\epsilon(x_0)\eta = 0$ となる測定が存在することを示して，不確定性関係式 $\epsilon(x_0)\eta \geq \hbar/2$ が成立しない測定があると主張している[9]．ここで $\hat{X}_t$ は相互作用後のプローブの位置演算子， $\epsilon(x_0)$ は相互作用前の位置 $\hat{x}_0$ の測定誤差， η はそのとき測定装置が電子に与えた運動量の擾乱（disturbance）である．しかしこの測定で $(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}} = 2\hat{X}_t$ とすれば測定誤差が変わり，不確定性関係式 $\epsilon(x_0)\eta \geq \hbar/2$ が成立していることがわかる．従って $(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}} = \hat{X}_t$ と $(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}} = 2\hat{X}_t$ のどちらの測定値演算子が正しいのかを明らかにしなければ，この問題は解決しない．

本論文では， $(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}$ を $\hat{X}_t$ と仮定するのではなく， $\hat{X}_t$ の関数 $G(\hat{X}_t)$ とし，測定誤差が最小になるように関数 $G(X)$ を決定する．そして，こうして得られた理論的測定値を用いた測定が，常に偏りのない測定になることを明らかにする．従ってこの測定値を用いた場合には，上で述べた３つの奇妙な事象は起こらない．

相互作用後の演算子 $\hat{x}_t$ の測定は，通常は議論されていないが，自由粒子の標準量子限界（Standard Quantum Limit，SQL）を論じるときには考えなければならない[10]．この場合もOzawaはプローブのあるオブザーバブル $\hat{X}_t$ の測定値 X を $\hat{x}_t$ の測定値とみなしている[11]．すなわち，$\hat{x}_t$ の測定値は $\hat{x}_0$ の測定値と同じとみなしているが，それは全くの間違いである．

Ozawaの測定値を用いると測定誤差は測定対象の波動関数の標準偏差に依存し，その標準偏差が０になる特別な場合にしか測定誤差が０にならない．従って任意の $|\phi_0\rangle$ に対して Bornの確率則を再現しない．正しい量子測定理論は任意の $|\phi_0\rangle$ に対してBornの確率則を再現しなけらばならないと，前論文Ｉ[1]で述べた．本論文では，理論的測定値を用いれば任
2 意の $|\phi_0\rangle$ に対してBornの確率則を再現することを明らかにする．

2　非直接測定モデル

ミクロな対象の量子測定を考える．対象粒子と測定装置の一部であるプローブは時刻０に相互作用を始め，時刻 t に相互作用を終了するとする．粒子とプローブの相互作用が終了した直後にプローブの演算子 $\hat{X}_t$ を別の測定装置を用いて測定し，その測定値 X を用いて

対象粒子の測定前のオブザーバブル $\hat{x}_0$ と測定後のオブザーバブル $\hat{x}_t$ の測定値を予測する．このときの時間発展のユニタリ演算子を $\hat{U}$ とすると，$\hat{x}_t$ は $\hat{U}^\dagger(\hat{x}_0 \otimes \hat{I})\hat{U}$ で与えられる．$\hat{X}_t$ を測定する際の測定誤差は0であり，またこの測定によって対象粒子のオブザーバブルは擾乱されないと仮定されている．このような測定モデルを非直接測定モデル（indirect measurement model）という．すべての量子測定は，ある非直接測定モデルと統計的に等値であることがわかっている[12)].

相互作用後のオブザーバブル $\hat{x}_t$ と $\hat{X}_t$ は可換であるので，同時固有状態 $|\sigma_0, \Sigma_0\rangle$ が存在する：

$$\hat{x}_t|\sigma_0, \Sigma_0\rangle = x|\sigma_0, \Sigma_0\rangle, \qquad \hat{X}_t|\sigma_0, \Sigma_0\rangle = X|\sigma_0, \Sigma_0\rangle. \tag{1}$$

ここで $|\sigma_0\rangle$ と $|\Sigma_0\rangle$ はそれぞれ対象及びプローブに作用するある演算子 $\hat{\sigma_0}$ と $\hat{\Sigma_0}$ の固有状態であり，固有値は連続であると仮定した：

$$\hat{\sigma_0}|\sigma_0\rangle = \sigma_0|\sigma_0\rangle, \qquad \hat{\Sigma_0}|\Sigma_0\rangle = \Sigma_0|\Sigma_0\rangle. \tag{2}$$

ここで式（1）の固有値 x と X は演算子 $\hat{\sigma_0}$ と $\hat{\Sigma_0}$ の固有値 σ_0 と Σ_0 の関数であるから

$$x = f(\sigma_0, \Sigma_0), \qquad X = g(\sigma_0, \Sigma_0). \tag{3}$$

この式より，Σ_0 の値を既知として $\hat{X}_t$ の測定値 X を用いて決定することができるのは，対象の演算子 $\hat{\sigma_0}$ と $\hat{x}_t$ の固有値 σ_0 と x のみであることがわかる．従って $\hat{X}_t$ の測定値 X を用いて $\hat{x}_0$ の測定値を求めるためには，σ_0 は x_0 でなければならない．すなわち $\hat{\Sigma_0}$ は $\hat{X}_0$ と等しくなくてもよいが，$\hat{\sigma_0}$ は $\hat{x}_0$ に等しくなければならない．式 (1) より

$$\hat{x}_0\hat{U}|x_0, \Sigma_0\rangle = x\hat{U}|x_0, \Sigma_0\rangle, \qquad \hat{X}_0\hat{U}|x_0, \Sigma_0\rangle = X\hat{U}|x_0, \Sigma_0\rangle \tag{4}$$

を得る．これらは $\hat{U}|x_0, \Sigma_0\rangle$ が演算子 $\hat{x}_0$ と $\hat{X}_0$ の同時固有状態であり，その固有値がそれぞれ x，Xであることを示している．従って[注1)]

$$\hat{U}|x_0, \Sigma_0\rangle = e^{i\delta}|x, X\rangle, \qquad \hat{X}_0|X\rangle = X|X\rangle \tag{5}$$

ここで $e^{i\delta}$ は位相因子である．この式は，相互作用前の対象とプローブの状態 $|x_0, \Sigma_0\rangle$ が，相互作用後に $|x, X\rangle$ に変わることを示している[注2)].

3　理論的測定値の決定

測定値をどのような基準に基づいて理論的に決定すべきであろうか？　自然科学では２つの理論があって異なる理論値を与えているとき，実験値により近い理論を与える理論が，正しい理論であると考えられている．このように考えると，測定対象の値にできるだけ近くなるように測定値を決定すべきであろう．本論文では，測定誤差が最小になるように測定値を定義する． 3

最初に $\hat{x}_t$ の測定について考察する．通常 $\hat{X}_t$ の測定値を用いて $\hat{x}_t$ の測定値演算子を

$(\hat{x}_t)_{\rm m} = \hat{X}_t$ と仮定しているが，そのような仮定に根拠があるわけではない．しかし非直接測定モデルでは $\hat{X}_t$ の測定値を用いて $\hat{x}_t$ の測定値をもとめているので，$(\hat{x}_t)_{\rm m}$ は $\hat{X}_t$ の関数でなければならない：

$$(\hat{x}_t)_{\rm m} = F(\hat{X}_t). \tag{6}$$

このとき測定対象のオブザーバブル $\hat{x}_t$ の測定誤差 $\epsilon(x_t)$ の２乗は

$$\epsilon^2(x_t) = \langle \phi_0, \xi_0 | \{(\hat{x}_t)_{\rm m} - \hat{x}_t\}^2 | \phi_0, \xi_0 \rangle \tag{7}$$

で定義される．$\hat{x}_t = \hat{U}^\dagger \hat{x}_0 \hat{U}$，$\hat{X}_t = \hat{U}^\dagger \hat{X}_0 \hat{U}$ であるから

$$\epsilon^2(x_t) = \int \{F(X) - x\}^2 \, |\langle x, X | \hat{U} | \phi_0, \xi_0 \rangle|^2 dx dX$$

となる．ここで $\langle x, X | \hat{U} | \phi_0, \xi_0 \rangle$ は対象とプローブが相互作用した後の全体系の波動関数である．

演算子 $\hat{X}_t$ の測定値が X であるときの測定後の対象の波動関数を $\langle x | \phi_t \rangle_X$ とすると

$$\langle x | \phi_t \rangle_X = \langle x,\ X | \hat{U} | \phi_0, \xi_0 \rangle / \sqrt{P(X)} \tag{8}$$

となることがわかる．ここで $P(X)$ は演算子 $\hat{X}_t$ が測定値 X をとる確率密度である：

$$P(X) = \int |\langle x, X | \hat{U} | \phi_0, \xi_0 \rangle|^2 dx = \int |\phi_0(x_0)|^2 |\xi_0(\Sigma_0)|^2 dx. \tag{9}$$

ここで式（5）を用いた．式（8）より

$$|\langle x, X | \hat{U} | \phi_0, \xi_0 \rangle|^2 = |\langle x | \phi_t \rangle_X|^2 P(X) \tag{10}$$

が成立している．ここで $\hat{X}_t$ の測定値が X であるときの $\hat{x}_t$ の測定誤差 $\epsilon_X(x_t)$ の２乗を

$$\epsilon_X^2(x_t) = \int \{F(X) - x\}^2 |\langle x | \phi_t \rangle_X|^2 dx \tag{11}$$

と定義すると

$$\epsilon^2(x_t) = \int \epsilon_X^2(x_t) P(X) dX \tag{12}$$

となる．ここで $\hat{X}_t$ の測定値が X であるときの $\hat{x}_t$ の平均

$$\langle x \rangle_X = \int x |\langle x | \phi_t \rangle_X|^2 dx \tag{13}$$

4 を用いて，$x - F(X) = \{x - \langle x \rangle_X\} - \{\langle x \rangle_X - F(X)\}$ と変形すると，

$$\begin{aligned} \epsilon_X^2(x_t) &= \sigma_X^2(x) + \{\langle x \rangle_X - F(X)\}^2, \\ \sigma_X^2(x) &= \int \{x - \langle x \rangle_X\}^2 |\langle x | \phi_t \rangle_X|^2 dx, \end{aligned} \tag{14}$$

となる．ここで $\sigma_X(x)$ は $\hat{X}_t$ の測定値が X であるときの測定後の対象粒子のオブザーバブル $\hat{x}_t$ の標準偏差である．$\sigma_X(x)$ は $F(X)$ の決定の仕方に依存していないから，測定値を

$$F(X) = \langle x \rangle_X \tag{15}$$

と定義すれば，誤差 $\epsilon_X(x_t)$ は最小値 $\sigma_X(x)$ をとることが式（14）よりわかる．同じことは，式（11）を用いて $F(x)$ の任意の変分 $\delta F(x)$ に対して，測定誤差が極値をとる条件

$$\delta\epsilon_X^2(x_t) = 2\int\{F(X) - x\}|\langle x|\phi_t\rangle_X|^2 dx = 0$$

より得ることもできる．このように決定された測定値を理論的測定値と名付ける．

式（14）は自由粒子のSQLについて考察した前論文Ⅲにおいて既に導出している．そこでは $\epsilon_X(x_t) \geq \sigma_X(x)$ と結論していた．しかし式（15）のように測定値を定義すべきであるから $\epsilon_X(x_t) = \sigma_X(x)$ となる．このことは測定誤差 $\epsilon_X(x_t)$ で対象のオブザーバブル $\hat{x}_t$ を測定したとき，測定後の対象粒子の位置の標準偏差 $\sigma_X(x)$ が測定誤差 $\epsilon_X(x_t)$ に等しいことを示している．

次に相互作用前のオブザーバブル $\hat{x}_0$ の測定値について考察する．非直接測定モデルでは $\hat{x}_0$ の測定値演算子 $(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}$ も $\hat{X}_t$ の関数であるから，

$$(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}} = G(\hat{X}_t) \tag{16}$$

と置くことができる．式(3)より x_0 は X と x の関数として書くことができるから，$\hat{x}_0 = u(\hat{x}, \hat{X})$ と書ける．従って $\hat{x}_0$ の測定誤差を $\epsilon(x_0)$ とすると

$$\begin{aligned}\epsilon^2(x_0) &= \langle\phi_0, \xi_0|\{(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}} - \hat{x}_0\}^2|\phi_0, \xi_0\rangle \qquad (17)\\ &= \int\{G(X) - u(x, X)\}^2|\langle x, X|\hat{U}|\phi_0, \xi_0\rangle|^2 dx dX.\end{aligned}$$

従って $\hat{X}_t$ の測定値が X であるときの $\hat{x}_0$ の測定誤差を $\epsilon_X(x_0)$ とすると

$$\epsilon_X^2(x_0) = \int\{G(X) - u(x, X)\}^2|\langle x|\phi_t\rangle_X|^2 dx, \tag{18}$$

$$\epsilon^2(x_0) = \int\epsilon_X^2(x_0)P(X)dx \tag{19}$$

となる．ここで $\hat{x}_t$ 測定の式（13）と同様に

$$\langle x_0\rangle_X = \int u(x, X)|\langle x|\phi_t\rangle_X|^2 dx \tag{20}$$

と定義し，$u(x, X) - G(X) = \{u(x, X) - \langle x_0\rangle_X\} + \{\langle x_0\rangle_X - G(X)\}$ と変形すると 5

$$\epsilon_X^2(x_0) = \sigma_X^2(x_0) + \{\langle x_0\rangle_X - G(X)\}^2, \tag{21}$$

$$\sigma_X^2(x_0) = \int\{u(x, X) - \langle x_0\rangle_X\}^2|\langle x|\phi_t\rangle_X|^2 dx \tag{22}$$

となる．式（21）より $\hat{x}_0$ の理論的測定値を

$$G(X) = \langle x_0 \rangle_X \tag{23}$$

と定義すれば，誤差 $\epsilon_X(x_0)$ は最小値 $\sigma_X(x_0)$ をとることがわかる．同じことは，式（18）を用いて $G(x)$ の任意の変分 $\delta G(x)$ に対して，測定誤差が極値をとる条件

$$\delta\epsilon_X^2(x_0) = 2\int\{G(X) - \langle\hat{x}_0\rangle_X\}|\langle x|\phi_t\rangle_X|^2 dx = 0$$

より得ることができる．

$\hat{x}_0$ と $\hat{X}_0$ の固有値が離散的な場合も，上と同様に測定誤差が最小になる理論的測定値を定義することができる．簡単のために縮退はないと仮定すると，詳細は省略するが，式(1)，(2)，(3) の代わりに，

$$\hat{x}_t|x_i,\Sigma_j\rangle = x_k|x_i,\ \Sigma_j\rangle, \qquad \hat{X}_t|x_i,\Sigma_j\rangle = X_l|x_i,\Sigma_j\rangle, \tag{24}$$

$$\hat{x}_0|x_i\rangle = x_i|x_i\rangle, \qquad \hat{\Sigma}_0|\Sigma_j\rangle = \Sigma_j|\Sigma_j\rangle, \qquad \hat{X}_0|X_l\rangle = X_l|X_l\rangle, \tag{25}$$

$$x_k = f(x_i,\Sigma_j), \qquad X_l = g(x_i,\Sigma_j) \tag{26}$$

が成立するので，$\hat{X}_t$ の測定値が X_l であるときの $\hat{x}_t$ の理論的測定値を

$$F(X_l) = \langle x\rangle_{X_l} = \sum_k x_k|\langle x_k|\phi_t\rangle_{X_l}|^2 \tag{27}$$

と定義すれば，このときの $\hat{x}_t$ の測定誤差 $\epsilon_{X_l}(x_t)$ は最小値 $\sigma_{X_l}(x) = \{\sum_k(x_k-\langle x\rangle_{X_l})^2|\langle x_k|\phi_t\rangle_{X_l}|^2\}^{1/2}$ をとることがわかる．また $\hat{X}_t$ の測定値が X_l であるときの $\hat{x}_0$ の理論的測定値を

$$G(X_l) = \langle x_0\rangle_{X_l} = \sum_k u(x_k,X_l)|\langle x_k|\phi_t\rangle_{X_l}|^2 \tag{28}$$

と定義すれば，このとき $\hat{x}_0$ の測定誤差 $\epsilon_{X_l}(x_0)$ は最小値 $\sigma_{X_l}(x_0) = \{\sum_k(u(x_k,X_l)-\langle x_0\rangle_{X_l})^2|\langle x_k|\phi_t\rangle_{X_l}|^2\}^{1/2}$ をとることがわかる．ただしここで $u(x_k,X_l)$ は式（26）の x_i を x_k と X_l の関数として解いたものである．

対象粒子とプローブが式（5）あるいは（24）を満たす相互作用をするとき，その相互作用を利用して $\hat{x}_0$ と $\hat{x}_t$ の測定をおこなうことができる．これまでの議論からわかるように，我々の理論は $\hat{U}$ の具体的な関数形には全く依存していないという一般性を持っている．

4　偏りのない測定

6

固有値が連続的なとき，$\hat{x}_t$ の測定値として式（15）の理論的測定値を用いたとき，任意の $|\phi_0\rangle$ に対して

$$\langle\phi_0,\xi_0|(\hat{x}_t)_{\mathrm{m}}|\phi_0,\xi_0\rangle = \langle\phi_0,\xi_0|\hat{x}_t|\phi_0,\xi_0\rangle \tag{29}$$

が成立しているので，$\hat{x}_t$ 測定は偏りのない測定（unbiased measurement）になっている．このことを以下に示す．$\int|\langle x|\phi_t\rangle_X|^2 dx = 1$ と，任意の X に対して $F(X) = \langle x\rangle_X$ が

成立しているので，

$$\langle\phi_0,\xi_0|(\hat{x}_t)_{\rm m}|\phi_0,\xi_0\rangle \ =\int F(X)|\langle x,X|\hat{U}|\phi_0,\xi_0\rangle|^2dxdX \ = \int F(X)|\langle x|\,\phi_t\rangle_X|^2P(X)dxdX$$

$$= \int\langle x\rangle_XP(X)dX \ = \int x|\langle x|\phi_t\rangle_X|^2P(X)dxdX = \langle\phi_0,\,\xi_0|\hat{x}_t|\phi_0,\xi_0\rangle.$$

更に $\hat{x}_0$ の測定値として式（23）の理論的測定値を用いたときにも，任意の $|\phi_0\rangle$ に対して

$$\langle\phi_0,\xi_0|(\hat{x}_0)_{\rm m}|\phi_0,\xi_0\rangle = \langle\phi_0|\hat{x}_0|\phi_0\rangle \tag{30}$$

が成立しているので，$\hat{x}_0$ 測定は偏りのない測定になっている．このことを以下に示す．上と同様に，任意の X に対して $G(X)=\langle x_0\rangle_X$ が成立しているので

$$\langle\phi_0,\xi_0|(\hat{x}_0)_{\rm m}|\phi_0,\xi_0\rangle =\int G(X)|\langle x,X|\hat{U}|\phi_0,\xi_0\rangle|^2dxdX = \int G(X)\,|\langle x|\phi_t\rangle_X|^2P(X)dxdX$$

$$= \int\langle x_0\rangle_XP(X)dX = \int u(x,X)|\langle x|\phi_t\rangle_X|^2P(X)dxdX = \langle\phi_0|\hat{x}_0|\phi_0\rangle.$$

固有値が離散的な場合にも，式（27），（28）のように $\hat{x}_t$ と $\hat{x}_0$ の理論的測定値を定義すれば，式（29）と（30）が成立しているので，偏りのない測定であることがわかる．プローブのオブザーバブル $\hat{X}_t=\hat{U}^\dagger\hat{X}_0\hat{U}$ の測定値 X を用いて，$\hat{x}_0$ と $\hat{x}_t$ の測定値を求めるという非直接測定モデルにおいて，測定誤差が最小になるように理論的測定値を定義したとき，その測定値を用いた測定が偏りのない測定になることを示した．

5　実践的測定値の決定

前章で求めた理論的測定値（15），（23），（27），（28）はすべて測定対象の初期状態 $|\phi_0\rangle$ に依存している．すなわち $|\phi_0\rangle$ がわからなければ求めることができない．実際の測定実験では測定前には $|\phi_0\rangle$ がわかっていないことが多いので，このような場合には，少なくとも最初の測定実験では理論的測定値を求めることはできない[注3)]．ここでは測定対象の初期状態 $|\phi_0\rangle$ についての情報が全くない場合の測定値を決定する．

固有値が連続的である場合，$\hat{x}_t$ の理論的測定値（15）と式（9），（10）を用いると

$$\langle x\rangle_XP(X) = \int x|\langle x,X|\hat{U}|\phi_0,\xi_0\rangle|^2dx = \int x|\phi_0(x_0)|^2|\xi_0(\Sigma_0)|^2dx.$$

よって $P(X)\neq 0$ として，理論的測定値は

$$\langle x\rangle_X = \frac{\int x|\phi_0(x_0)|^2|\xi_0(\Sigma_0)|^2dx}{\int|\phi_0(x_0)|^2|\xi_0(\Sigma_0)|^2dx} \tag{31}$$

7

となる．ここで $|\phi_0(x_0)|^2$ についての情報が全くないのであるから，$|\phi_0(x_0)|^2$ を定数とみなした測定値を実践的測定値 $\langle x\rangle_X^{\rm em}$ と定義する：

$$\langle x\rangle_X^{\rm em} = \frac{\int x|\xi_0(\Sigma_0)|^2dx}{\int|\xi_0(\Sigma_0)|^2dx}. \tag{32}$$

同様にして $\hat{x}_0$ の理論的測定値と実践的測定値 $\langle x_0\rangle_X^{\mathrm{em}}$ を求めると

$$\langle x_0\rangle_X = \frac{\int u(x,X)|\phi_0(x_0)|^2|\xi_0(\Sigma_0)|^2dx}{\int |\phi_0(x_0)|^2|\xi_0(\Sigma_0)|^2dx},\ \langle x_0\rangle_X^{\mathrm{em}} = \frac{\int u(x,X)|\xi_0(\Sigma_0)|^2dx}{\int |\xi_0(\Sigma_0)|^2dx} \tag{33}$$

となる．

同様にして固有値が離散的な場合の理論的測定値と実践的測定値を求めると，$\hat{x}_t$ の場合には

$$\langle x\rangle_{X_l} = \frac{\sum_k x_k|\phi_0(x_i)|^2|\xi_0(\Sigma_j)|^2}{\sum_k |\phi_0(x_i)|^2|\xi_0(\Sigma_j)|^2},\quad \langle x\rangle_{X_l}^{\mathrm{em}} = \frac{\sum_k x_k|\xi_0(\Sigma_j)|^2}{\sum_j |\xi_0(\Sigma_j)|^2} = \sum_k x_k|\xi_0(\Sigma_j)|^2 \tag{34}$$

となる．更に $\hat{x}_0$ の場合には

$$\langle x_0\rangle_{X_l} = \frac{\sum_k u(x_k,X_l)|\phi_0(x_i)|^2|\xi_0(\Sigma_j)|^2}{\sum_k |\phi_0(x_i)|^2|\xi_0(\Sigma_j)|^2},\ \langle x_0\rangle_{X_l}^{\mathrm{em}} = \sum_k u(x_k,X_l)|\xi_0(\Sigma_j)|^2 \tag{35}$$

となる．

具体的な例で，実践的測定値がどうなるか調べてみる．まず次のような位置測定の場合を考察する[1), 2)]：

$$\hat{x}_t = \alpha_1\hat{x}_0 + \alpha_2\hat{X}_0,\quad \hat{X}_t = \beta_1\hat{x}_0 + \beta_2\hat{X}_0. \tag{36}$$

ここで α_i, β_i は実数であり，式 (2) のプローブの演算子 $\hat{\Sigma}_0$ は位置演算子 $\hat{X}_0$ になっている．固有値の関係式 (3) は

$$x = \alpha_1x_0 + \alpha_2X_0,\qquad X = \beta_1x_0 + \beta_2X_0 \tag{37}$$

であるから，これを解いて

$$x_0 = \alpha(X_0,X) = \frac{1}{\beta_1}X - \frac{\beta_2}{\beta_1}X_0,\quad \beta_1 \neq 0, \tag{38}$$

$$x = \beta(X_0,X) = \frac{\alpha_1}{\beta_1}X - \frac{1}{\beta_1\Gamma}X_0,\ \Gamma = 1/(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \tag{39}$$

を得る．これらを式 (32)，(33) に代入して，$dx = -dX_0/(\beta_1\Gamma)$ を用いると，

$$\langle x_0\rangle_X^{\mathrm{em}} = \frac{1}{\beta_1}X - \frac{\beta_2}{\beta_1}\langle X_0\rangle,\quad \langle x\rangle_X^{\mathrm{em}} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}X - \frac{1}{\beta_1\Gamma}\langle X_0\rangle \tag{40}$$

を得る．すなわちこの場合の実践的測定値は，前論文 I で発見法的に求めた測定値に一致している．そこではプローブの演算子 $\hat{X}_0$ の標準偏差 $\sigma(X_0) = 0$ のときの測定値(38), (39) を求め，$\sigma(X_0)$ が 0 でないときには，我々は波動関数 $\xi_0(X_0)$ のどの位置成分 X_0 と対象が相互作用するのかを知ることはできないから，その平均 $\langle\hat{X}_0\rangle$ を用いて $\hat{x}_0$ と $\hat{x}_t$ の測定値

（40）を決定した．式（31）と（33）において，$X=$一定のもとでxを変化させると$|\phi_0(x_0)|^2$と$|\xi_0(X_0)|^2$は変化する．$\sigma(X_0)$より$|\phi_0(x_0)|^2$の標準偏差$\sigma(x_0)$が非常に大きいとき，xを変化させたとき$|\phi_0(x_0)|^2=$一定とみなすことができる．この章で示したように，このようにして得られた測定値が実践的測定値であった．またこのとき逆に$|\xi_0(X_0)|^2$がδ関数のように振舞うとみなして，成分X_0をその平均$\langle\hat{X}_0\rangle$で近似して得られるのが前論文Ⅰで得られた測定値である．このように考えると，両者が一致するのは不思議ではない．

この議論から，逆の場合すなわち$\sigma(X_0)\gg\sigma(x_0)$の場合には，実践的測定値を用いると測定誤差は大きくなってしまうことが予想される．しかし我々が対象の初期状態について何の情報も持っていないときには，これらの測定値を使うのが正しい．

もう一つの例は，最近の量子ビット検証実験で用いられた相互作用の場合である[3)]：

$$\hat{x}_t=\hat{x}_0,\quad \hat{X}_t=\hat{x}_0\otimes\hat{\Sigma}_0. \tag{41}$$

ここで$\hat{x}_0^2=1$，$\hat{\Sigma}_0^2=1$であるから，固有値は離散的で式（24），（25）の添え字i，j，k，lは±1の値しかとらない．また$\hat{x}_t=\hat{x}_0$であるから，２つの理論的測定値は等しくなる．また実践的測定値も等しくなる．

位置測定で実践的測定値を導出したときの方法を用いると，式（41）で$\hat{\Sigma}_0$をその平均$\langle\hat{\Sigma}_0\rangle$で置き換えたときの$\hat{x}_0$が$(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}^{\mathrm{em}}$であるから，

$$(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}^{\mathrm{em}}=\frac{\hat{x}_0\otimes\hat{\Sigma}_0}{\langle\hat{\Sigma}_0\rangle},\quad \langle\hat{\Sigma}_0\rangle\neq0 \tag{42}$$

となる．$\langle\hat{\Sigma}_0\rangle=0$のときには$(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}^{\mathrm{em}}=0$で測定値は常に0となり，無意味な測定となる．式（35）を用いてこの場合の理論的測定値を求めると，

$$\langle x\rangle_+=\frac{|c_+|^2|d_+|^2-|c_-|^2|d_-|^2}{|c_+|^2|d_+|^2+|c_-|^2|d_-|^2},\quad \langle x\rangle_-=\frac{|c_+|^2|d_-|^2-|c_-|^2|d_+|^2}{|c_+|^2|d_-|^2+|c_-|^2|d_+|^2} \tag{43}$$

を得る．ここで$\hat{x}_0$と$\hat{\Sigma}_0$の固有値方程式を

$$\hat{x}_0|\pm\rangle=\pm|\pm\rangle,\qquad \hat{\Sigma}_0|\pm\rangle=\pm|\pm\rangle\qquad \text{（複号同順）}$$

とし，初期状態のベクトルを

$$|\phi_0\rangle=c_+|+\rangle+c_-|-\rangle,\qquad |\xi_0\rangle=d_+|+\rangle+d_-|-\rangle$$ 9

と展開とした．ここで$c_\pm$，$d_\pm$は複素数の定数である．式（35）を用いて，実践的測定値を求めると

$$\langle x\rangle_+^{\mathrm{em}}=|d_+|^2-|d_-|^2=\langle\hat{\Sigma}_0\rangle,\qquad \langle x\rangle_-^{\mathrm{em}}=|d_-|^2-|d_+|^2=-\langle\hat{\Sigma}_0\rangle$$

となる．従って$\hat{x}_0$の実践的測定値演算子$(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}^{\mathrm{em}}$は

$$(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}^{\mathrm{em}} = \langle\hat{\Sigma}_0\rangle\hat{X}_t = \langle\hat{\Sigma}_0\rangle\hat{x}_0 \otimes \hat{\Sigma}_0 \tag{44}$$

となり，式（42）と一致しない．しかし式（44）の測定値は $\langle(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}^{\mathrm{em}}\rangle = \langle\hat{x}_0\rangle\langle\hat{\Sigma}_0\rangle^2$ となり，偏りのない測定になっていないので，新しい測定値演算子を $\langle(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}^{\mathrm{em}}\rangle/\langle\hat{\Sigma}_0\rangle^2$ と定義して偏りのない測定にすると，式（42）の演算子に一致する．

実践的測定値を用いた測定が常に偏りのない測定になるわけではない．しかし $(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}^{\mathrm{em}}$ が $\hat{x}_0$ の 1 次式のとき，任意の $|\phi_0\rangle$ に対して

$$\langle\phi_0|(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}^{\mathrm{em}}|\phi_0\rangle = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1\langle\hat{x}_0\rangle \tag{45}$$

となり， $\hat{\gamma}_0$ と $\hat{\gamma}_1$ が $|\phi_0\rangle$ に依存しないようにできるから，新しい測定値演算子を

$$\left\{\langle(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}^{\mathrm{em}}\rangle - \langle\xi_0|\hat{\gamma}_0|\xi_0\rangle\right\}/\langle\xi_0|\hat{\gamma}_1|\xi_0\rangle, \qquad \langle\xi_0|\hat{\gamma}_1|\xi_0\rangle \neq 0 \tag{46}$$

と定義すれば，偏りのない測定となる．偏りのある測定値を用いると，奇妙な事象A，B，Cが現れることがあるので，偏りのある測定値を使用することは避けるべきである．従って実践的測定値を用いるときには， $\hat{x}_0$ の 1 次式である $(\hat{x}_0)_{\mathrm{m}}^{\mathrm{em}}$ を用いるべきである．

6　理論的測定値はBornの確率則を再現する

理論的測定値を用いたとき，Bornの確率則を再現することを示す．最初に固有値が離散的な場合を考えると，式（28）の理論的測定値より，

$$|\langle x_k|\phi_t\rangle_{X_l}|^2 = \begin{cases} 1 & (x_k = x_{\bar{k}} \text{ のとき}) \\ 0 & (x_k \neq x_{\bar{k}} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{47}$$

が成立しているとき， $\langle x_0\rangle_{X_l} = u(x_{\bar{k}}, X_l)$，$\langle x_0^2\rangle_{X_l} = u^2(x_{\bar{k}}, X_l)$ であるから測定誤差 $\epsilon_{X_l}(x_0) = 0$ となる．式（26）よりこのとき x_i と Σ_j はある値 $x_{\bar{i}}$ と $\Sigma_{\bar{j}}$ 以外は 0 となる：

$$|\xi_0(\Sigma_j)|^2 = \begin{cases} 1 & (\Sigma_j = \Sigma_{\bar{j}} \text{ のとき}) \\ 0 & (\Sigma_j \neq \Sigma_{\bar{j}} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{48}$$

$\hat{X}_t$ の測定値が X_l のときの $\hat{x}_0$ の測定値が x_i であるから， $P(X_l)$ は $\hat{x}_0$ の測定値が $x_{\bar{i}}$ である確率に等しい． $\hat{X}_t$ の測定値が X_l をとる確率は

$$P(X_l) = \sum_k |\phi_0(x_i)|^2|\xi_0(\Sigma_j)|^2 = |\phi_0(x_{\bar{i}})|^2 \tag{49}$$

10 となる．従ってBornの確率則を再現している．

次に式（28）で $u(x_k, X_l)$ が x_k の関数でなく， X_l のみの関数のときを考える：

$$u(x_k, X_l) = q(X_l). \tag{50}$$

このときも測定誤差 $\epsilon_{X_l}(x_0) = 0$ となるが，このときBornの確率則を再現することを示す． $x_i = u(x_k, X_l)$ が X_l のみの関数であるから， X_l は x_i のみの関数であり， Σ_j の関数

ではない．
また X_l と x_i は 1 対 1 に対応していて，このときの x_i を $x_{\bar{i}}$ とすると，測定誤差が 0 であるから測定値は $x_{\bar{i}}$ である． $\hat{X}_t$ の測定値が X_l をとる確率は

$$P(X_l) = \sum_k |\phi_0(x_i)|^2 |\xi_0(\Sigma_j)|^2 = |\phi_0(x_{\bar{i}})|^2 \tag{51}$$

である．よってBornの確率則を再現している．

固有値が連続のときを考えると， $|\langle x|\phi_t\rangle_X|^2 = \delta(x-\overline{x})$ のとき $\epsilon_X(x_0) = 0$ となることがわかる． $x = \beta(\Sigma_0, X)$ とかけるから, X =一定で x が一つの値 $\overline{x}$ しかとらないのは, $|\xi_0(\Sigma_0)|^2 = \delta(\Sigma_0 - \overline{\Sigma}_0)$ のときである．Bornの確率則によれば， $\hat{x}_0$ の測定値が区間 $\Delta(\overline{x}_0) = \{x_0; \overline{x}_0 - \delta\overline{x}_0/\ 2 \le x_0 \le \overline{x}_0 + \delta\overline{x}_0/2\}$ にある確率は $|\phi_0(\overline{x}_0)|^2 \delta\overline{x}_0$ である．また $\hat{X}_t$ の測定値が区間 $\Delta(\overline{X}) = \{X; \overline{X} - \delta\overline{X}/\ 2 \le X \le \overline{X} + \delta\overline{X}/2\}$ にある確率は $P(\overline{X})\delta\overline{X}$ である．従って

$$P(\overline{X})\delta\overline{X} = |\phi_0(\overline{x}_0)|^2 \delta\overline{x}_0 \tag{52}$$

が成立しているとき，Bornの確率則を再現している． $\hat{X}_t$ の測定値が X をとる確率密度は式 (9) で与えられている． $\Sigma_0 = v(x, X)$ とすると，式 (9) の積分では X を定数としているので， $d\Sigma_0 = \frac{\partial v}{\partial x} dx$． $\Sigma_0 = \overline{\Sigma}_0$ のときの x と x_0 をそれぞれ $\overline{x}$ と $\overline{x}_0$ とすると，

$$P(X) = |\phi_0(\overline{x}_0)|^2 / |\frac{\partial v(\overline{x}, X)}{\partial \overline{x}}|. \tag{53}$$

ここで X は x_0 の関数でなければならないので， $\frac{\partial v(\overline{x}, X)}{\partial \overline{x}} \ne 0$ である． $\overline{x}_0 = u(\overline{x}, X)$ であるから

$$\delta\overline{x}_0 = \frac{\partial u}{\partial \overline{x}} \delta\overline{x} + \frac{\partial u}{\partial X} \delta X. \tag{54}$$

$\delta\overline{\Sigma}_0 = \frac{\partial v}{\partial \overline{x}} \delta\overline{x} + \frac{\partial v}{\partial X} \delta X = 0$ より， $\delta\overline{x} = -\frac{\partial v}{\partial X} \delta X / \frac{\partial v(\overline{x}, X)}{\partial \overline{x}}$. これを式 (54) に代入して

$$\delta\overline{x}_0 = \{\frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial v}{\partial \overline{x}} - \frac{\partial u}{\partial \overline{x}}\frac{\partial v}{\partial X}\} \delta X / \frac{\partial v}{\partial \overline{x}}. \tag{55}$$

$\hat{U}$ がユニタリである条件

$$\frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial v}{\partial \overline{x}} - \frac{\partial u}{\partial \overline{x}}\frac{\partial v}{\partial X} = \pm 1 \tag{56}$$

を使うと， $\delta\overline{x}_0 = \delta X / |\frac{\partial v}{\partial \overline{x}}|$. これを式 (53) に代入して式 (52) を得る．従ってBornの確率則を再現している．

$\overline{x}_0 = u(\overline{x}, X)$ が X のみの関数 $q(X)$ のときも誤差 $\epsilon_X(x_0) = 0$ となる．ユニタリ条件 11

(56) と $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ より,

$$|\frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial v}{\partial x}| = 1 \tag{57}$$

よって $P(X) = |\phi_0(x_0)|^2 / |\frac{\partial v}{\partial x}| = |\phi_0(x_0)|^2 |\frac{\partial u}{\partial X}| = |\phi_0(x_0)|^2 |dq(X)/dX|$． $x_0 = q(X)$ で

あるから， $\delta x_0 = |dq(X)/dX|\delta X$. よって $P(X)\delta X = |\phi_0(\overline{x}_0)|^2\delta x_0$. 従ってこのときもBornの確率則を再現している．

実践的測定値 $(\hat{x}_0)_{\rm m}^{\rm em}$ を用いたときもBornの確率則を再現していることを示す．固有値が離船的な場合を考えると，このためには，プローブの状態 $|\xi_0\rangle$ が $|\Sigma_{\bar{j}}\rangle$ のとき測定値 $\langle x_0\rangle_{X_l}^{\rm em}$ が正しい値 $x_{\bar{i}}$ になっていればよい．ここで $X_l = g(x_{\bar{i}}, \Sigma_{\bar{j}})$. このときの x_k を $x_{\bar{k}}$ とすると $x_{\bar{i}} = u(x_{\bar{k}}, X_l)$. 式（35）より

$$\langle x_0\rangle_{X_l}^{\rm em} = \sum_k u(x_k, X_l)|\xi_0(\Sigma_j)|^2 = u(x_{\bar{k}}, X_l) = x_{\bar{i}}.$$

従って実践的測定値 $(\hat{x}_0)_{\rm m}^{\rm em}$ を用いたときもBornの確率則を再現している．

7　まとめと議論

本論文では，測定対象の相互作用前のオブザーバブル $\hat{x}_0$ と相互作用後のオブザーバブル $\hat{x}_t$ の測定を非直接測定モデルで考察した．それらの測定誤差が最小になるように測定値を定義し，理論的測定値（15），（23），（27），（28）を得た．前論文Ⅲ[3]で偏りのある測定では，測定値が奇妙な振舞いをすることがあることを明らかにしたが，理論的測定値を用いた測定は常に偏りのない測定となるので，このような奇妙な現象は起きない．

しかし理論的測定値は測定対象の初期状態に依存しているので，初期状態がわからなければ実際に理論的測定値を求めることはできない．そこで初期状態についての情報が全くない場合の測定値（32），（33），（34），（35）を，理論的測定値から求め，それを実践的測定値と名付けた．

位置測定や最近の量子ビット測定の実践的測定値を具体的に求めてみると，以前に発見法的に筆者が求めた測定値（40），（42）に一致していた．実践的測定値を用いた測定が常に偏りのない測定になるわけではない．しかし実践的測定値 $(\hat{x}_0)_{\rm m}^{\rm em}$ が $\hat{x}_0$ の 1 次式のとき，偏りのない測定にすることができる．測定結果に偏りがあるとき，測定結果が奇妙が振舞いをする可能性があることを前論文Ⅲで示しているので，測定は偏りのない測定でなければならない．

理論的測定値は測定対象の初期状態に依存しているので，初期状態がわからなければ理論的測定値を求めることはできないと述べたが，多くの測定では，一連の測定結果から測定対象の初期状態を実際に予測することができる．量子ビット測定の場合を考えて，このことを具体的に説明する．量子ビット測定では同じ初期状態に対象とプローブを設定して，何回も $\hat{X}_t$ 測定をおこない，測定値が $X = +1$ である確率 $P(+)$ と測定値が $X = -1$ である確率 $P(-)$ を求める．前論文Ⅲで述べたように，

$$P(+) \;=\; |c_+|^2|d_+|^2 + |c_-|^2|d_-|^2, \tag{58}$$

$$P(-) \;=\; |c_+|^2|d_-|^2 + |c_-|^2|d_+|^2 \tag{59}$$

が成立している． $|d_+|$ と $|d_-|$ は既知であるから， $P(+)$ と $P(-)$ の測定値を用いて初期

状態の情報 $|c_+|^2$ と $|c_-|^2$ を求めることができる[注4]．従って式（43）から理論的測定値 $\langle x\rangle_+$ と $\langle x\rangle_-$ がわかる．

しかし時間間隔 τ で位置測定を2回おこなうことによって，その間の自由粒子の移動距離を求めるSQL実験の場合には，このような方法で理論的測定値を求めることはできない．従ってこのような場合には，実践的理論値を用いて測定誤差を求める必要がある．

正しい理論的測定値を求めることができたので，第1章で述べた位置測定の誤差がどうなるか，確認してみる．この測定では $\hat{X}_t = \hat{x}_0$ であるから，$x_0 = u(x, X) = X$ となる．理論的測定値はこのとき $\langle x_0\rangle_X = X$ で，式（57）の上で述べたように $\epsilon(x_0) = 0$ となる．η は有限の値になるので，Ozawaが主張しているように $\epsilon(x_0)\eta = 0$ が成立している．しかしこの結論は，正しい測定値を導出してはじめて得ることができることを留意すべきである．

同じことはOzawaの次の不確定性関係式[12)]（universally valid uncertainty relation）についてもいえる：

$$\epsilon(x_0)\eta(y_0) + \epsilon(x_0)\sigma(y_0) + \sigma(x_0)\eta(y_0) \geq \frac{1}{2}|\langle\phi_0|[\hat{x}_0, \hat{y}_0]|\phi_0\rangle|. \qquad (60)$$

ここで $\eta(y_0)$ は $\hat{x}_0$ の測定が測定対象の別のオブザーバブル $\hat{y}_0$ に与える擾乱，$\sigma(x_0)$，$\sigma(y_0)$ はそれぞれオブザーバブル $\hat{x}_0$，$\hat{y}_0$ の標準偏差である．Ozawaは $\hat{x}_0$ の測定値演算子を $\hat{X}_t$ とみなして，測定誤差を定義している．上の式の左辺で，測定誤差 $\epsilon(x_0)$ 以外のすべて物理量は測定値をどのように決定するかに依存していない．従って式（60）の不確定性関係式が成立しているかどうかを実験的に確かめる際には，測定誤差 $\epsilon(x_0)$ が最小になる測定値，すなわち理論的測定値を用いて左辺を評価しなければならない．間違った測定値を用いれば測定誤差が理論的測定値を用いた場合の測定誤差より大きくなるので，式（60）の左辺は右辺で与えられている下限よりもずっと大きくなるからである．
前論文Ⅱ[2)]で，偏りのない測定では

$$\sigma^2((x_0)_{\mathrm{m}}) = \sigma^2(x_0) + \epsilon^2(x_0) \qquad (61)$$

が常に成立していることを前提に，偏りのない測定では奇妙な測定事象A，B，Cが出現しないことを示した．しかし式（61）が成立するのは，偏りのない実践的測定値を用いた場合であることがわかる．理論的測定値を用いた場合には，一般的に偏りのない測定になるが，このときには式（61）ではなく

$$\sigma^2(x_0) = \epsilon^2(x_0) + \sigma^2((x_0)_{\mathrm{m}}) \qquad (62)$$

が成立している．この式を用いれば，式（61）を用いたのと全く同じ論法で事象AとBが出現しないことわかる．事象Cの場合には．測定値が常に同一のとき，$\sigma((x_0)_{\mathrm{m}}) = 0$ である．従ってこのとき式（62）から $\sigma(x_0) = \epsilon(x_0)$ を導出することはできるが，$\sigma(x_0) = \epsilon(x_0) = 0$ を導出することはできない．しかしこのとき $\hat{X}_t$ の測定値 X も常に同一であるから，式（1）と（24）から対象とプローブはそれぞれ $\hat{x}_0$ と $\hat{\Sigma}_0$ の固有状態にあることがわかる．従って $\sigma(x_0) = \epsilon(x_0) = 0$ である． 13

第６章で明らかにしたように，プローブの初期状態 $|\xi_0\rangle$ を式（1）の $|\Sigma_0\rangle$ に，あるいは式（25）の $|\Sigma_j\rangle$ に設定すると，測定誤差を０にすることができる．このとき理論的測定値及び実践的測定値を用いたときには，測定対象の任意の初期状態に対して測定誤差 $\epsilon(x_0)$ は０になり，その測定値を得る確率はBornの確率則を再現している．しかしOzawaの測定値を用いた場合には，任意の初期状態に対して測定誤差 $\epsilon(x_0)$ が０にならないので，Bornの確率則を再現できない．

注

１） 式（2）の $|\Sigma_0\rangle$ は $\hat{\Sigma}_0$ の固有状態，式（5）の $|X\rangle$ は $\hat{X}_0$ の固有状態であるから，誤解を避けるためには，その表記を変えなければならない．しかし誤解を招きそうな箇所はないので，そのままにする．

２） 式（1）で $\hat{x}_t$ と $\hat{X}_t$ の同時固有状態を $|\sigma_0, \Sigma_0\rangle = |m\rangle$ としたが，一般には $f(\sigma_0, \Sigma_0)$ を任意の関数として，$|m\rangle = \int f(\sigma_0, \Sigma_0)|\sigma_0,\ \Sigma_0\rangle d\sigma_0 d\Sigma_0$ となる．しかし測定の初期状態 $|m\rangle$ は，対象とプローブの状態のテンソル積になるので，上で述べた重ね合わせの状態ではない．また $\hat{X}_t$ の測定値 X より $\hat{x}_0$ の測定値が一意的に決定されることを要請しているから，$|m\rangle$ は $\hat{x}_0$ の固有状態でなければならない．従って $|m\rangle = |x_0, \Sigma_0\rangle$ と書くことができる．

３） ７章で述べているように，実際には多くの実験において，一連の測定結果を用いて測定対象の初期状態を予測することができる．

４） 測定の回数 N が小さいと $P(+)$ と $P(-)$ の測定値の統計誤差が大きくなるので，N を充分大きくする必要がある．

引用文献

（１）小杉誠司「Heisenbergの不確定性原理における位置測定の誤差」,『淑徳短期大学紀要』第48号，2009，p.155-166.

（２）小杉誠司「Heisenbergの不確定性原理における位置の測定値の不確定性」,『淑徳短期大学紀要』第50号，2011，p.145-158.

（３）小杉誠司「不確定性原理の量子ビット検証実験は正しいか？」,『淑徳短期大学紀要』第54号，2015，p.181-193.

（４）Jacqueline Erhart, Stephan Sponar, Georg Sulyok, Gerald Badurek, Masanao Ozawa, Yuji Hasegawa, Nature Physics **8**, 185（2012）.

（５）S. -Y. Baek, F. Kaneda, M. Ozawa, and K. Edamatsu, Sci. Rep. **3**, 2221（2013）.

（６）F. Kaneda, S. -Y. Baek, M. Ozawa, and K. Edamatsu, Phys. Rev. Lett. **112**, 020402（2014）.

（７）L. A. Rozema, A. Darabi, D. H. Mahler, A. Hayat, Y. Soudagar, and A. M. Steinberg, Phys. Rev. Lett. **109**, 100404（2012）.

（８）M. Ringbauer, D. N. Biggerstaff, M. A. Broome, A. Fedrizzi, C. Branciard and A. G. White Phys. Rev. Lett. **112**, 020401（2014）.

（９）M. Ozawa, Phys. Lett. A **299**, 1（2002）.

（10）小杉誠司「自由粒子の移動距離の測定における標準量子限界」,『淑徳短期大学紀要』第52号，2013, p.197-210.

（11）M. Ozawa, arXiv: 1505. 05014v1［quantum-ph］.
（12）M. Ozawa, Ann. of Phys. **311**（2004）, 350.